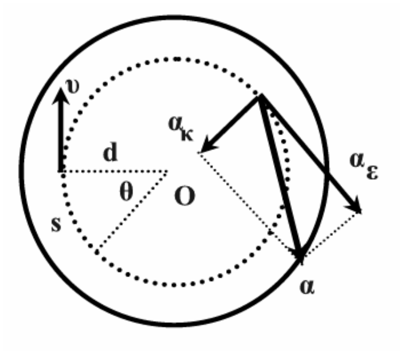
Συνοπτική θεωρία κινήσεων στερεού σώματος

Α. Κινηματική της μεταφορικής και στροφικής κίνησης

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
Ταχύτητα , $\vec{\upsilon}=d\vec{s}/dt$ (1m/s)	Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, ω=dθ/dt (1rad/s)
Επιτάχυνση: $\vec{a}$, $\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ ($1m/s^2$)	Γωνιακή επιτάχυνση , $\overrightarrow{a_{\gamma\nu}}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ($1rad/s^2$)
Μετατόπιση s (1m)	Γωνία στροφής θ (1rad)
s=υt ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, υ=σταθ.	θ=ωt ομαλή στροφική κίνηση, ω=σταθ.
$\upsilon=\upsilon_0 \pm \alpha t$ ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (α=σταθ) $s=\upsilon_0 t \pm (1/2)\alpha t^2$	$\omega=\omega_0 \pm \alpha_{\gamma\nu} t$ στροφική ομαλά μεταβαλλόμενη ($\alpha_{\gamma\nu}$=σταθ) $\theta=\omega_0 t \pm (1/2)\alpha_{\gamma\nu} t^2$

Σχέσεις μεταξύ στροφικής και μεταφορικής κίνησης για σημεία της περιφέρειας, ακτίνας, R.
$\upsilon=\omega\cdot R$
$\alpha=\alpha_{\gamma\nu}\cdot R$
s=θ·R (s το μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε γωνία θ)

 Οι τύποι της κινηματικής υλικού σημείου που απέχει απόσταση d από τον σταθερό άξονα περιστροφής του στερεού σώματος.



Γραμμική ταχύτητα: $\upsilon=\omega d$

Επιτρόχια (γραμμική) επιτάχυνση: $\alpha_\varepsilon=\alpha_{\gamma\nu,}d$

Κεντρομόλος επιτάχυνση: $\alpha_\kappa=\frac{\upsilon^2}{d}=\omega^2 d$

Συνολική επιτάχυνση: $\alpha=\sqrt{\alpha_\varepsilon^2+\alpha_\kappa^2}$

Μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία, θ: s=θ·d

 Όλα τα σημεία ενός στερεού που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα κάνουν κυκλική κίνηση με ακτίνα ίση με την απόσταση, d, που έχουν από τον άξονα. Τα σημεία αυτά ανεξάρτητα από την ακτίνα της τροχιάς τους έχουν:

α. Την ίδια γωνιακή ταχύτητα.
β. Την ίδια γωνιακή επιτάχυνση.
γ. Διαφορετική γραμμική ταχύτητα.
δ. Διαφορετική γραμμική ή επιτρόχια επιτάχυνση.
ε. Διαφορετική κεντρομόλο επιτάχυνση.
στ. Διαφορετική συνολική επιτάχυνση.

Β. Δυναμική της μεταφορικής και στροφικής κίνησης

Ροπή δύναμης ως προς άξονα περιστροφής ή σημείο: $\boldsymbol{\tau = F \cdot d}$

Ισορροπία στερεού σώματος: Ισχύουν μαζί: 1^o: $\boldsymbol{\Sigma \vec{F} = 0}$ **ή** $\boldsymbol{\Sigma F_x = 0}$ **και** $\boldsymbol{\Sigma F_y = 0}$

2^o: $\boldsymbol{\Sigma\tau = 0}$

Όταν σ' ένα στερεό σώμα που ισορροπεί ασκούνται μόνο τρεις **(3)** δυνάμεις οι φορείς τους διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Περιπτώσεις κινήσεων

1) $\Sigma \vec{F} = 0$ και $\Sigma\tau = 0$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{a_{cm}} = 0$ και $\alpha_{\gamma\nu} = 0$ Ισορροπία: αν $\upsilon_{cm} = 0$ και $\omega = 0$
Μεταφορική ευθ. ομαλή: αν υ_{cm}=σταθ. και $\omega = 0$
Στροφική ομαλή: αν $\upsilon_{cm} = 0$ και ω=σταθερό
Σύνθετη ομαλή: αν υ_{cm}= σταθ. και ω=σταθερό

2) $\Sigma \vec{F} \neq 0$ και $\Sigma\tau = 0$ $\rightarrow$ $\alpha_{cm} \neq 0$ και $\alpha_{\gamma\nu} = 0$ Αν $\omega = 0$, κάνει μεταφορική μεταβαλλόμενη.
Αν $\omega \neq 0$, κάνει σύνθετη, μεταφορική μεταβαλλόμενη και στροφική με σταθερή ταχύτητα

3) $\Sigma \vec{F} = 0$ και $\Sigma\tau \neq 0$ $\rightarrow$ $\alpha_{cm} = 0$ και $\alpha_{\gamma\nu} \neq 0$ Αν $\upsilon_{cm} = 0$, κάνει στροφική μεταβαλλόμενη.
Αν $\upsilon_{cm} \neq 0$ κάνει σύνθετη, στροφική μεταβαλλόμενη και μεταφορική με σταθερή ταχύτητα

4) $\Sigma \vec{F} \neq 0$ και $\Sigma\tau \neq 0$ $\rightarrow$ $\alpha_{cm} \neq 0$ και $\alpha_{\gamma\nu} \neq 0$ Σύνθετη: Μεταφορική και στροφική μεταβαλλόμενες

Η ροπή αδράνειας

Ροπή αδράνειας υλικού σημείου: $\boldsymbol{I = mr^2}$

Ροπή αδράνειας σώματος: $\boldsymbol{I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots}$

Θεώρημα Steiner: $I_K = I_{cm} + md^2$ Ως προς άξονα που διέρχεται από τυχαίο σημείο Κ και είναι παράλληλος με τον άξονα που διέρχεται από το cm και στο οποίο αναφέρεται η I_{cm}.

 Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από το σχήμα, την κατανομή μάζας, τη θέση του άξονα περιστροφής, τη μάζα και τις διαστάσεις του σώματος.

Η στροφορμή

Μέτρο στροφορμής υλικού σημείου: $\boldsymbol{L = m\upsilon r}$

Μέτρο στροφορμής στερεού σώματος: $\boldsymbol{L = I\omega}$

Στροφορμή συστήματος σωμάτων: $\overrightarrow{L_{\sigma\upsilon\sigma}} = \vec{L_1} + \vec{L_2} + \ldots$

Ο θεμελιώδης νόμος για υλικό σημείο: $\boldsymbol{\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}}$

Ο θεμελιώδης νόμος για σύστημα σωμάτων: $\boldsymbol{\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma}}{dt}}$

Οι σχέσεις της δυναμικής των κινήσεων

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ	ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ
Δύναμη F (1N)	Ροπή τ (1Nm)
Μάζα m (1kg)	Ροπή αδράνειας I ($1kg\cdot m^2$)
Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής $\mathbf{\Sigma F = m\cdot\alpha}$	Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης $\mathbf{\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\nu}}$
Ορμή(p): p=mυ 1kgm/s	Στροφορμή(L) L=I·ω $1kgm^2/s$ Στροφορμή υλικού σημείου: L=mυr
$\mathbf{\Sigma F = \frac{dp}{dt}}$ (Γενικότερη έκφραση)	$\mathbf{\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}}$ (Γενικότερη έκφραση)
Διατήρηση ορμής: Αν $\mathbf{\Sigma F_{\varepsilon\xi}}$=0 τότε $\vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma}$ **=σταθερό**	Διατήρηση στροφορμής: Αν $\mathbf{\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0}$ τότε $\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma}$**=σταθερό**

Γ. Ενεργειακή μελέτη της μεταφορικής και στροφικής κίνησης

Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής : $\mathbf{K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}I\omega^2}$

Έργο σταθερής ροπής: $\mathbf{W_\tau = \pm\tau\cdot\theta}$

Ισχύς ροπής: $\mathbf{P_\tau = \tau\cdot\theta}$

Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής: $\mathbf{\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega}$

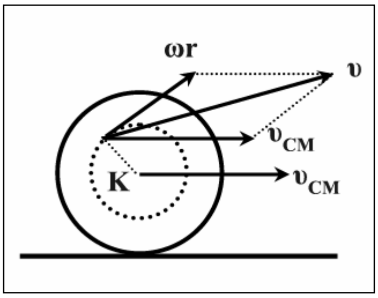
ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ	ΣΤΡΟΦΙΚΗ
Κινητική ενέργεια : $\mathbf{K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}m\upsilon^2}$	Κινητική ενέργεια: $\mathbf{K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}I\omega^2}$
Έργο σταθερής δύναμης: $\mathbf{W_F = \pm F_x\cdot s}$ (1J)	Εργο σταθερής ροπής: $\mathbf{W_\tau = \pm\tau\cdot\theta}$ (1J)
Ισχύς δύναμης: $\mathbf{P_F = F_x\cdot\upsilon}$ (1W) Ρυθμός μεταβολής $\mathbf{\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon}$ κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς:	Ισχύς ροπής: $\mathbf{P_\tau = \tau\cdot\theta}$ (1W) Ρυθμός μεταβολής $\mathbf{\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega}$ κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής:
Θεώρημα έργου ενέργειας: $\mathbf{\Sigma W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2}$ Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνά ισούται με τη μεταβολή της μεταφορικής κινη ενέργειας του σώματος.	Θεώρημα έργου ενέργειας: $\mathbf{\Sigma W_\tau = \frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2}$ Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ρ των δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματο

Δ. Σύνθετες κινήσεις

Η μελέτη της κύλισης του στερεού – Τροχός που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

Από κινηματική άποψη:
Οι τρεις συνθήκες της κύλισης:
1^{η}: Η μετατόπιση του cm είναι ίση με το μήκος του τόξου περιστροφής: $\mathbf{dx_{cm}=d\theta \cdot R}$
2^{η}: Η ταχύτητα του cm: $\boldsymbol{\upsilon_{cm}=\omega R}$
3^{η}: Η επιτάχυνση του cm: $\boldsymbol{\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\nu}\cdot R}$

Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας (μόνο), λόγω στροφικής κίνησης έχει ίδιο μέτρο με την ταχύτητα υ_{cm}, του κέντρου μάζας cm.
Η επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας (μόνο), λόγω στροφικής κίνησης έχει ίδιο μέτρο με την επιτάχυνση α_{cm} κέντρου μάζας cm.

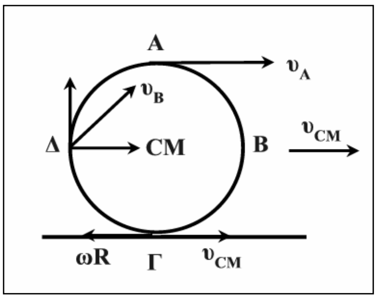


Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κάθε τυχαίου σημείου του τροχού είναι :

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\omega}\,\mathbf{r}$$

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ κάθε τυχαίου σημείου του τροχού είναι :

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_{cm}} + \overrightarrow{a_{\gamma\nu} r} + \overrightarrow{a_{\kappa\varepsilon\nu}}$$



Οι ταχύτητες τριών χαρακτηριστικών σημείων:

$\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\omega R=2\upsilon_{cm}\rightarrow\upsilon_A=\boldsymbol{2\upsilon_{cm}}$

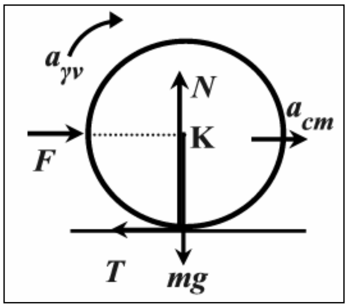
$\upsilon_\Gamma= \upsilon_{cm}-\omega R=0 \rightarrow\boldsymbol{\upsilon_\Gamma=0}$

$\upsilon_\Delta=\upsilon_B=\sqrt{\upsilon_{cm}{}^2+(\omega R)^2}=\sqrt{\upsilon_{cm}{}^2+\upsilon_{cm}{}^2}=\upsilon_{cm}\sqrt{2}\rightarrow\boldsymbol{\upsilon_\Delta=\upsilon_B=\upsilon_{cm}\sqrt{2}}$

Από δυναμική άποψη:

Για να κυλίεται ένα τροχός χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει η τριβή του με το δάπεδο να είναι στατική και όχι ολίσθησης. Για τη στατική τριβή όμως ξέρουμε ότι έχει μέτρο μικρότερο της οριακής της τιμής $T_{\sigma\tau(max)}$. Όταν η στατική τριβή γίνεται οριακή το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει. Άρα ισχύει:

$$T<T_{\sigma\tau(max)} \rightarrow \mathbf{T<\boldsymbol{\mu_\sigma}N}$$



Ο συντελεστής στατικής τριβής μ_σ είναι λίγο μεγαλύτερος του συντελεστή τριβής ολίσθησης μ, αλλά συνήθως θεωρούνται ίσοι.
Στο στερεό που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, στο σχήμα ισχύουν:
$\Sigma F_x=m\alpha_{cm}\rightarrow F-T= m\alpha_{cm}$ (1)
$\Sigma F_y=0 \rightarrow N-mg=0\rightarrow N=mg$ (2)
$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\nu} \rightarrow T\cdot R=I\cdot\alpha_{\gamma\nu}$ (3)
$\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\nu}\cdot R$ (4)
$T<\mu_\sigma N\rightarrow\mu_\sigma>\frac{T}{N}$ (5)

Από ενεργειακή άποψη:

1. Αν το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με την επίδραση μόνο συντηρητικών δυνάμεων που εκτελούν έργο πάνω του, τότε ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του σώματος (ΑΔΜΕ).

$$\mathbf{E_{\alpha\rho\chi}=E_{\tau\varepsilon\lambda}}$$

$$\mathbf{E=U+K_{\mu\varepsilon\tau}+K_{\pi\varepsilon\rho}=\text{σταθερή}}$$

*Η στατική τριβή δεν κάνει έργο.

2. Αν το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με την επίδραση και μη συντηρητικών δυνάμεων που εκτελούν έργο πάνω του, τότε ισχύει το θεώρημα μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του σώματος (ΘΜΜΕ):

$$\mathbf{E_{\alpha\rho\chi}+\Sigma W_{\mu\eta,\sigma\upsilon\nu\tau.}=E_{\tau\varepsilon\lambda}}$$

3. Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος (ΘΜΚΕ): Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ισούται με τη μεταβολής της συνολικής κινητικής ενέργειας του σώματος λόγω μεταφοράς και λόγω περιστροφής.

$$\mathbf{\Sigma W=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}}$$

4. Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος που κάνει ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση:

$$\mathbf{\frac{dK}{dt}=\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt}+\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt}=\Sigma F\cdot\upsilon+\Sigma\tau\cdot\omega}$$

Κινήσεις συστημάτων

Αν έχουμε σύστημα σωμάτων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους τότε:
1. Αν το σύστημα δέχεται την επίδραση μόνο συντηρητικών δυνάμεων που εκτελούν έργο πάνω του, τότε ισχύει η **αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας** του συστήματος. Στη μηχανική ενέργεια του συστήματος ανήκουν οι δυναμικές και κινητικές ενέργειες όλων των μελών του. Οι δυναμικές ενέργειες βαρύτητας είναι μετρημένες ως προς την ίδια στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

$$\mathbf{E_{\alpha\rho\chi}=E_{\tau\varepsilon\lambda}}$$

2. Αν το σύστημα δέχεται και την επίδραση μη συντηρητικών δυνάμεων που εκτελούν έργο πάνω του ισχύει το θεώρημα **μεταβολής της μηχανικής ενέργειας** του συστήματος (ΘΜΜΕ):

$$\mathbf{E_{\alpha\rho\chi}+\Sigma W_{\mu\eta\ \sigma\upsilon\nu\tau.}=E_{\tau\varepsilon\lambda}}$$

3. Ακόμα μπορούμε να γράψουμε το ΘΜΚΕ για κάθε μέλος του συστήματος χωριστά σε κάθε περίπτωση. Να αποφεύγουμε το ΘΜΚΕ για όλο το σύστημα παρόλο που βέβαια ισχύει.

4. Για ένα σύστημα σωμάτων που ανακατανέμει τη μάζα του, εξαιτίας μόνο εσωτερικών δυνάμεων σε σχέση με τον άξονα περιστροφής, ισχύει η **αρχή διατήρησης στροφορμής.**

Αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ τότε $\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma}$=σταθερό
Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

1. Η κινηματική της στροφικής και της σύνθετης κίνησης

(Ε) Ερωτήσεις

Ε1.1 Να συμπληρωθούν τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:
α. Στη μεταφορική κίνηση κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν ………… ταχύτητα.
β. Στη μεταφορική κίνηση των στερεών ισχύουν οι νόμοι που διέπουν την κίνηση των ………. …………
γ. Υλικό σημείο είναι ένα σώμα που δεν έχει ……………. και έτσι έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο……………κίνηση.
δ. Μηχανικά στερεά λέγονται τα σώματα που δεν ……………….όταν τους ασκούνται δυνάμεις.

Ε1.2 Να συμπληρωθούν τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:
α. Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει …………………..
β. Ένα στερεό σώμα κάνει στροφική κίνηση όταν όλα του τα σημεία ………………..γύρω από ένα άξονα με την ίδια …………..ταχύτητα.
γ. Αν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που περιστρέφεται είναι ………………….θα λέμε ότι το σώμα κάνει ομαλή στροφική κίνηση.
δ. Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει προσανατολισμό τότε λέμε ότι κάνει ……………. κίνηση.

Ε1.3 Να συμπληρωθούν τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:
α. Η σύνθετη κίνηση ενός σώματος μπορεί να μελετηθεί ως το αποτέλεσμα της σύνθεσης μιας ……………. και μιας ………………κίνησης.
β. Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο του σώματος που κινείται όπως ένα ……….. ……… με μάζα ίση με τη μάζα του …………., αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται και στο σώμα.
γ. Το κέντρο μάζας συμπίπτει με το κέντρο…………….αν το σώμα βρίσκεται μέσα σε ………….. βαρυτικό πεδίο.
δ. Το κέντρο μάζας των ……………. και ……………..σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους.

Ε1.4 Να συμπληρωθούν τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:
α. Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ στερεού σώματος είναι ένα φυσικό …………..μέγεθος με μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής της …………. μετατόπισης, διεύθυνση ίδια με αυτή του …………….. περιστροφής και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του…………………
β. Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha_{\gamma\nu}}$ στερεού σώματος είναι ένα φυσικό ……………μέγεθος με μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής της …………..ταχύτητας, διεύθυνση ίδια με αυτή του ………… περιστροφής και φορά ίδια με αυτή της μεταβολής της γωνιακής …………….
γ. Μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι το 1….. και της γωνιακής επιτάχυνσης το 1…..

δ. Όλα τα σημεία ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, περιστρέφονται κάθε χρονική στιγμή με την ίδια …………… ταχύτητα.

Ε1.5 Ένα στερεό σώμα κάνει μεταφορική κίνηση, όταν :
α. Όλα τα σημεία του βρίσκονται σε κίνηση.
β. Κινείται σε ευθεία τροχιά.
γ. Δεν δέχεται εξωτερικές δυνάμεις.
δ. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του κινείται παράλληλα προς τον εαυτό του.

Ε1.6 Ένα στερεό σώμα κάνει στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα, όταν:
α. Το κέντρο μάζας του διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά.
β. Το κέντρο μάζας του κάνει κυκλική κίνηση.
γ. Όλα του τα σημεία βρίσκονται σε κίνηση.
δ. Όσα του σημεία κινούνται διαγράφουν κυκλική τροχιά.

Ε1.7 Ένα στερεό σώμα κάνει σύνθετη κίνηση όταν:
α. Όλα του τα σημεία διαγράφουν κυκλική τροχιά.
β. Το κέντρο μάζας του διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά.
γ. Εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση.
δ. Υπάρχουν σημεία του σώματος που μένουν ακίνητα.

Ε1.8 Κατά τη μεταφορική κίνηση ενός στερεού σώματος:
α. Όλα του τα σημεία του βρίσκονται σε κίνηση.
β. Όλα του τα σημεία έχουν, την ίδια χρονική στιγμή, την ίδια ταχύτητα.
γ. Κάποια σημεία του έχουν, την ίδια χρονική στιγμή, διαφορετική γραμμική επιτάχυνση.
δ. Η τροχιά μπορεί να είναι και καμπυλόγραμμη.
ε. Ένα τυχαίο τμήμα ΑΒ του σώματος μετατοπίζεται παράλληλα με τον εαυτό του.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1.9 Κατά τη στροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από σταθερό άξονα όλα τα σημεία του εκτός από τα σημεία του άξονα:
α. κάνουν κυκλική κίνηση.
β. έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.
γ. έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα.
δ. έχουν την ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1.10 Κατά τη σύνθετη κίνηση ενός στερεού σώματος:
α. Το σώμα υποχρεωτικά κυλίεται.
β. Το σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει συνεχώς προσανατολισμό.
γ. Το κέντρο μάζας του διαγράφει, υποχρεωτικά, ευθεία τροχιά.
δ. Όλα τα σημεία του έχουν ταυτόχρονα γραμμική και γωνιακή ταχύτητα.
ε. Το κέντρο μάζας εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1. 11 Το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος:
α. Είναι το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος αν δεχότανε αυτό όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό σώμα.
β. Είναι αδύνατο να βρίσκεται εκτός σώματος.
γ. Ταυτίζεται με το κέντρο συμμετρίας μόνο για ομογενή και συμμετρικά σώματα.

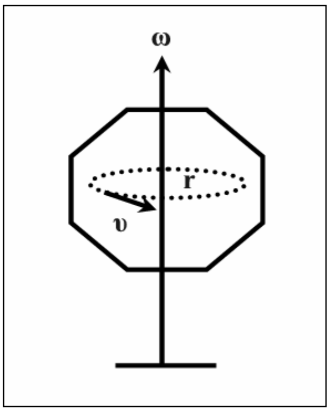
δ. Συμπίπτει με το κέντρο βάρους, αν το σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1.12 Στερεό σώμα εκτελεί στροφική κίνηση. Η γωνιακή του ταχύτητα, :
α. Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής θέσης του κινητού.
β. Έχει διεύθυνσή που είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής.
γ. Έχει ίδια διεύθυνση με τον άξονα περιστροφής.
δ. Έχει μονάδα μέτρησης το 1m/s.
ε. Έχει φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1.13 Η γωνιακή επιτάχυνση στερεού σώματος :
α. Εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής θέσης του κινητού.
β. Ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής του ταχύτητας,
γ. Έχει μονάδα μέτρησης το 1rad/s^2.
δ. Έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{\omega}$.
ε. Είναι ίδια για όλα τα σημεία του σώματος που κινούνται.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1.14 Σώμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και ένα σημείο του σώματος που απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής έχει κάποια χρονική στιγμή, γραμμική ταχύτητα υ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\upsilon=\omega\cdot r$$



Αν η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται να αποδειχθεί ότι η σχέση που συνδέει τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος $\alpha_{\gamma\nu}$ με την εφαπτομενική επιτάχυνση α ενός σημείου που απέχει απόσταση r από τον με άξονα περιστροφής είναι:

$$\alpha=\alpha_{\gamma\nu}\cdot r$$

Ε1.15 Στερεό σώμα κάνει ομαλή στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από ακλόνητο άξονα. Η κεντρομόλος επιτάχυνση, α_κ, ενός σημείου του που απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής:
α. Είναι μηδέν, αφού η κίνηση είναι ομαλή.
β. Είναι διάφορη του μηδενός και οφείλεται μόνο στη μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του σημείου.
γ. Είναι ανάλογη της γραμμικής ταχύτητας του σημείου.
δ. Έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.
ε. Έχει μέτρο ίσο με, $\alpha_\kappa=\omega^2 r$.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1.16 Στερεό σώμα κάνει ομαλή στροφική κίνηση με σταθερή περίοδο Τ, γύρω από ακλόνητο άξονα.
α. Το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας είναι ανάλογο της περιόδου, Τ.
β. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου που απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής ισούται με $\upsilon=2\pi r/T$.
γ. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι ανάλογη της συχνότητας περιστροφής.
δ. Όλα τα σημεία του στερεού που κινούνται έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα.
ε. Όλα τα σημεία του στερεού που κινούνται έχουν την ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση.

Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

Ε1.17 Δίσκος κάνει στροφική κίνηση γύρω από ακλόνητο άξονα. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

α. Όλα τα σημεία του δίσκου, εκτός από τα σημεία του άξονα, κάνουν κυκλική κίνηση με κέντρο ένα σημείο του άξονα σε επίπεδο κάθετο σ' αυτόν, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω.

β. Όσο μακρύτερα από τον άξονα περιστροφής βρίσκεται ένα σημείο τόσο μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα έχει.

γ. Αν ο δίσκος επιταχύνεται, όλα του τα σημεία έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση.

δ. Είναι δυνατόν σε κάποια χρονική στιγμή που ο δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα μηδέν, η γωνιακή του επιτάχυνση να είναι διάφορη του μηδενός.

Ε1.18 Σε μια μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση στερεού σώματος γύρω από ακλόνητο άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}$:

α. Με δεδομένα ότι τη χρονική στιγμή, $t_0=0$, είναι, $\omega=\omega_0$ και $\theta_0=0$, να αποδείξετε τις σχέσεις:

i. για τη γωνιακή ταχύτητα : $\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\nu}t$.

ii για τη γωνιακή θέση: $\theta=\omega_0 t+ \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\nu}t^2$.

β. Να σχεδιάσετε σε ένα στερεό σώμα τις γωνιακές ταχύτητες $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ ($\omega_2>\omega_1$) σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, t και t+dt, τη μεταβολή τους $d\vec{\omega}$ και τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\nu}$.

Ε1.19 Ομογενής τροχός περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Δύο σημεία Α και Β απέχουν από τον άξονα περιστροφής αποστάσεις r_1 και r_2. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα των γραμμικών τους ταχυτήτων είναι:

α. $\upsilon_1=\upsilon_2$ β. $\upsilon_1 r_2=\upsilon_2 r_1$ γ. $\upsilon_1 r_1=\upsilon_2 r_2$ δ. $\upsilon_1 r_2^2=\upsilon_2 r_1^2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε1.20 Ομογενής τροχός περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Δύο σημεία Α και Β απέχουν από τον άξονα περιστροφής αποστάσεις $r_1=R$ και $r_2=R/3$, αντίστοιχα, όπου R η ακτίνα του τροχού. Ποιες από τις ακόλουθες σχέσεις μεταξύ των μεγεθών των δύο σημείων είναι σωστές; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

i. Για τις γραμμικές ταχύτητες ισχύει:

α. $\upsilon_A=3\upsilon_B$ β. $\upsilon_A=\upsilon_B$ γ. $\upsilon_B=3\upsilon_A$

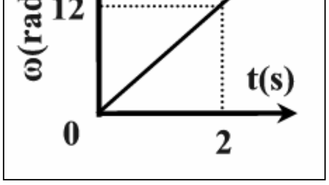
ii. Για τις συχνότητες περιστροφής ισχύει:

α. $f_A=3f_B$ β. $f_A=f_B/3$ γ. $f_A=f_B$

iii Για τις κεντρομόλους επιταχύνσεις ισχύει:

α. $\alpha_{\kappa,A}= 3\alpha_{\kappa,B}$ β. $\alpha_{\kappa,A}= \alpha_{\kappa,B}$ γ. $\alpha_{\kappa,B}= 3\alpha_{\kappa,A}$

Ε1.21 Η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που κάνει στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη γραφική παράσταση. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;



α. Η γωνιακή επιτάχυνση είναι $12 rad/s^2$.

β. Η γωνιακή μετατόπιση του σώματος από 0 έως 2s είναι 12rad.

γ. Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t=1s είναι 6rad/s.

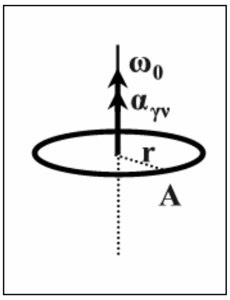
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.22 Ο δίσκος του σχήματος έχει ακτίνα r=0,1m και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ γωνιακή ταχύτητα ω_0=2rad/s, ενώ η γωνιακή θέση του σημείου Α της περιφέρειας είναι θ_0=2rad. Ο τροχός αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}$=3rad/s^2.

Ι. Να σχεδιάσετε τη γωνιακή και τη γραμμική ταχύτητα του σημείου Α σε μια τυχαία χρονική στιγμή t.

ΙΙ. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σημείου Α τη χρονική στιγμή t=10s είναι:

α. ω=2rad/s β. ω=32rad/s γ. ω=302rad/s



ΙΙΙ. Η γωνιακή θέση του σημείου Α, τη χρονική στιγμή t=4s είναι:

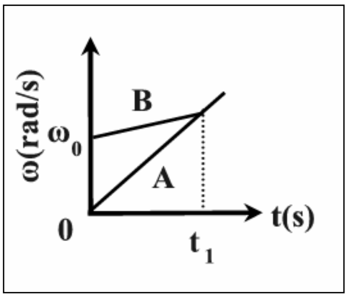
α. θ=24rad β. θ=32rad γ. θ=34rad

IV. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Α τη χρονική στιγμή t=10s είναι:

α. υ=3,2m/s β. υ=3020m/s γ. υ=30,2m/s

Να αιτιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας.

Ε1.23 Δύο ομογενείς τροχοί, Α και Β, εκτελούν στροφικές κινήσεις γύρω από ακλόνητο άξονα που περνάει από το κέντρο τους και είναι κάθετος σ΄ αυτούς. Οι ακτίνες των τροχών r_A και r_B έχουν σχέση $r_B=2r_A$ και οι γωνιακές τους ταχύτητες μεταβάλλονται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες;



α. Μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση έχει ο τροχός Α.

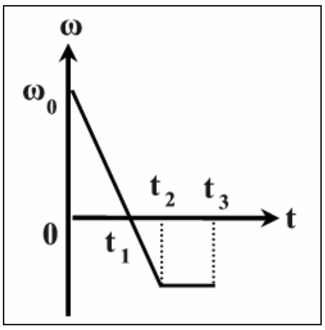
β. Στο χρονικό διάστημα [0–t_1], ο τροχός Α κάνει περισσότερες περιστροφές.

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού Β έχει διπλάσια ταχύτητα από ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού, Α.

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού Β έχει διπλάσια κεντρομόλο επιτάχυνση από ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού, Α.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.24 Ομογενής δίσκος εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν. Η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη γραφική παράσταση, (ω–t), που φαίνεται στο σχήμα. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;



α. Τη χρονική στιγμή t_1 ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του τροχού μηδενίζεται.

β. Τη χρονική στιγμή t_1 το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης αλλάζει φορά.

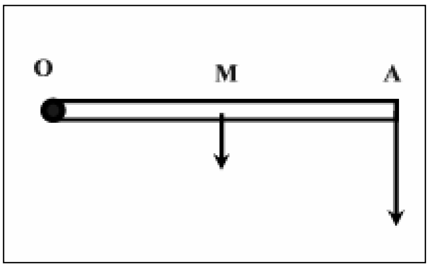
γ. Τη χρονική στιγμή t_1 το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας αλλάζει φορά.

δ. Στο χρονικό διάστημα (0–t_2) το διάνυσμα μεταβολής dω έχει σταθερή κατεύθυνση.

ε. Στο χρονικό διάστημα (t_2–t_3) ισχύει dω/dt=0.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.25 Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος σ' αυτήν με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}$. Το σημείο Μ είναι το μέσον της.



Ι. Τα βέλη που βλέπετε στο σχήμα αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή και μπορεί να αφορούν:

α. Γωνιακές ταχύτητες.
β. Γραμμικές ταχύτητες λόγω περιστροφής.
γ. Γωνιακές επιταχύνσεις.

ΙΙ. Για τα σημεία Α και Μ και για μια δεδομένη χρονική στιγμή είναι σωστές οι σχέσεις:

α. $\upsilon_A=2\upsilon_M$ β. $\omega_A=2\omega_M$ γ. $\alpha_{\gamma\nu,A}=\alpha_{\gamma\nu,M}$ δ. $\alpha_A=2\alpha_M$

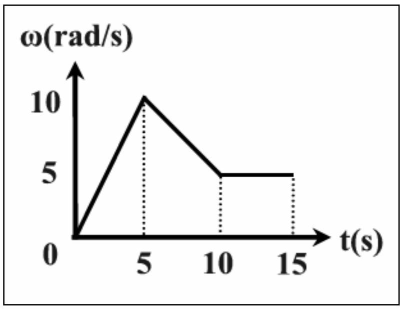
ΙΙΙ. Αν για $t_0=0$ είναι $\omega_0=0$ και $\theta_0=0$ τότε, όταν η ράβδος έχει διαγράψει γωνία θ=4rad η κεντρομόλος επιτάχυνση, α_κ, του σημείου Α, με την επιτρόχια επιτάχυνση, α, του ίδιου σημείου συνδέεται με τη σχέση:

α. $\alpha_\kappa=2\alpha$ β. $\alpha_\kappa=4\alpha$ γ. $\alpha_\kappa=8\alpha$ δ. $\alpha_\kappa=\alpha$

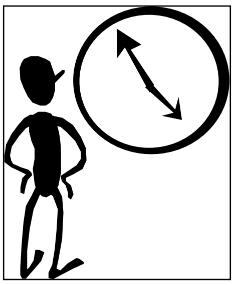
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.26 Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας ενός τροχού που κάνει στροφική κίνηση, γύρω από ακλόνητο άξονα. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές και ποιες λανθασμένες. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Από 0 έως 5s η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται με ρυθμό 10rad/s^2.
β. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας από 0 έως 15s δεν αλλάζει φορά.
γ. Τη χρονική στιγμή t=5s το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνση αλλάζει φορά.
δ. Τη χρονική στιγμή t=12s η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδέν.
ε. Από 0 έως 10s η γωνιακή μετατόπιση του τροχού είναι 62,5rad.
στ. Τη χρονική στιγμή t=7s η γωνιακή επιτάχυνση είναι 1rad/s^2.



Ε1.27 Το ρολόι είναι σταματημένο. Για να το βάλουμε στη σωστή ώρα περιστρέφουμε τον λεπτοδείκτη με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α_λ=3rad/s^2. Η γωνιακή επιτάχυνση του ωροδείκτη θα είναι:



α. 3rad/s^2 β. 0,25rad/s^2 γ. 0,5rad/s^2 δ. 1,5rad/s^2

Ποια είναι η σωστή απάντηση; Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Ε1.28 Καρούλι ακτίνας R έχει τυλιγμένο νήμα συνολικού μήκους λ και στηρίζεται σε σταθερό οριζόντιο άξονα. Το καρούλι αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}$ και το νήμα να ξετυλίγεται. Το χρονικό διάστημα t που χρειάζεται να ξετυλιχτεί το νήμα είναι:

α. $t=\sqrt{l/Ra_{\gamma\nu}}$ β. $t=\sqrt{2R/la_{\gamma\nu}}$ γ. $t=\sqrt{2l/Ra_{\gamma\nu}}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε1.29 Τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, $υ_{cm}$. Όλα τα σημεία του τροχού, εκτός του κέντρου μάζας:
α. Μόνο περιστρέφονται.
β. Περιστρέφονται και μεταφέρονται ταυτόχρονα.
γ. Μόνο μεταφέρονται.

Ε1.30 Τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, $υ_{cm}$. Όλα τα σημεία του τροχού έχουν την ίδια:
α. Γωνιακή ταχύτητα, ω.
β. Γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής.
γ. Ταχύτητα λόγω μεταφοράς, $υ_{cm}$.
δ. Συνισταμένη ταχύτητα.

Ε1.31 Τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, $υ_{cm}$. Ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού που έχει ακτίνα, R:
α. Περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $ω=υ_{cm}/R$.
β. Έχει ταχύτητα λόγω μεταφοράς ίση με $υ_{cm}$.
γ. Έχει κάθε χρονική στιγμή συνολική ταχύτητα $2υ_{cm}$.
δ. Κάνει σύνθετη κίνηση με συνολική ταχύτητα που κυμαίνεται από 0 έως $2υ_{cm}$.
ε. Έχει κεντρομόλο επιτάχυνση $υ_{cm}{}^2/R$.
Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

Ε1.32 Τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;
α. Κάθε σημείο του τροχού κάνει σύνθετη κίνηση.
β. Όλα τα σημεία της περιφέρειας έχουν γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής ίση με $ω\cdot R$.
γ. Το κέντρο μάζας μεταφέρεται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $ω\cdot R$.
δ. Κάθε σημείο της περιφέρειας τη στιγμή που εφάπτεται στο έδαφος έχει γωνιακή ταχύτητα, μηδέν.

Ε1.33 Ομογενής τροχός ακτίνας R, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
α. Να αποδειχθεί ότι κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητα κέντρου μάζας, $υ_{cm}$ συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα ω με τη σχέση,

$$υ_{cm}=ω\cdot R$$

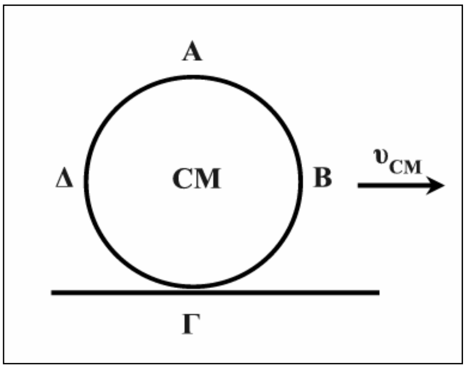
β. Να αποδειχθεί ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας $α_{cm}$ συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση $α_{γν}$ με τη σχέση,

$$α_{cm}=α_{γν}\cdot R$$

Ε1.34 Οι τροχοί ενός αυτοκίνητου ακτίνας R κυλίονται καθώς το αυτοκίνητο επιταχύνεται. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι αναγκαίες συνθήκες ώστε ο κάθε τροχός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;
α. Κάθε χρονική στιγμή ισχύει για τις ταχύτητες, $υ_{cm}=ω\cdot R$.
β. Κάθε χρονική στιγμή ισχύει για τις επιταχύνσεις, $α_{cm}=α_{γν}\cdot R$.
γ. Η μετατόπιση dx του κέντρου μάζας του τροχού και η γωνιακή μετατόπιση dθ συνδέονται με τη σχέση, $dx=R\cdot dθ$.
δ. Όλα τα προηγούμενα μαζί.
ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.

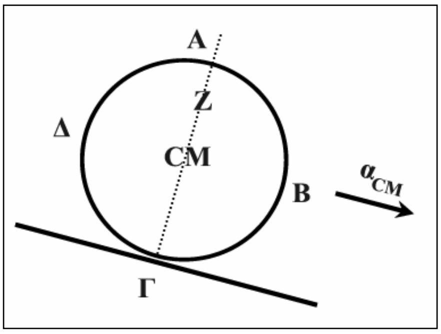
στ. Μόνο τα (α) και (β).

Ε1.35 Ο ομογενής τροχός του σχήματος, ακτίνας R, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας CM, $υ_{cm}$. Να αντιστοιχηθούν οι ταχύτητες που ακολουθούν με τις αντίστοιχες παραστάσεις:



α. Η ταχύτητα του σημείου Β.	1. 0
β. Η ταχύτητα του σημείου CM.	2. $\sqrt{2}υ_{cm}$
γ. Η ταχύτητα του σημείου Α.	3. $2υ_{cm}$
δ. Η ταχύτητα του σημείου Γ.	4. $υ_{cm}$
ε. Η ταχύτητα του σημείου Δ.	5. $4υ_{cm}$

Ε1.36 Ομογενής τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο με επιτάχυνση κέντρου μάζας $α_{cm}$. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;



α. Η εφαπτομενική επιτάχυνση λόγω περιστροφής όλων των σημείων της περιφέρειας ισούται με την $α_{cm}$.

β. Η συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου Α είναι $2α_{cm}$

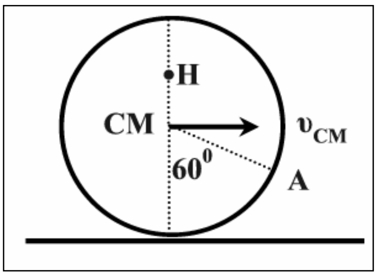
γ. Η συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου Ζ που απέχει r=R/2 από το CM και βρίσκεται πάνω στην ΑΓ είναι $3α_{cm}/2$.

δ. Όλα τα σημεία του τροχού εκτός του cm έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση, $α_{γν}=α_{cm}R$.

ε. Η συνολική επιτάχυνση κάθε σημείου εκτός του cm είναι $\vec{a} = \overrightarrow{a_{cm}} + \overrightarrow{a_{γν} r} + \overrightarrow{a_{κεν}}$

στ. Η συνολική επιτάχυνση του σημείου Γ είναι μηδέν.

Ε1.37 Ο τροχός ακτίνας R, που φαίνεται στο σχήμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα $υ_{cm}$.



Ι. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α είναι:

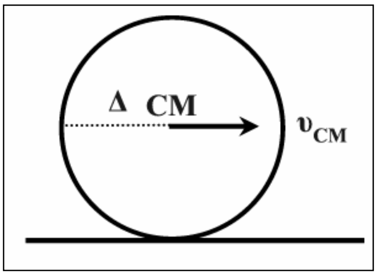
α. $2υ_{cm}$ β. $υ_{cm}/2$ γ. $υ_{cm}$ δ. $\sqrt{3}\, υ_{cm}$

ΙΙ. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Η που απέχει από το CM απόσταση R/2 είναι:

α. $2υ_{cm}$ β. $3υ_{cm}/2$ γ. $υ_{cm}/2$ δ. $\sqrt{3}\, υ_{cm}$

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

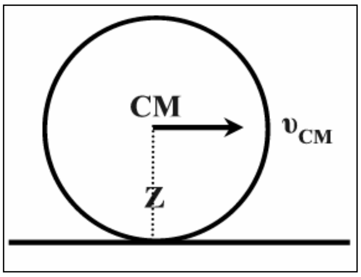
Ε1.38 Ο τροχός που φαίνεται στο σχήμα έχει ακτίνα R και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα $υ_{cm}$. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Δ που απέχει από το κέντρο απόσταση R/2 και από το έδαφος R, είναι:



α. $2υ_{cm}$ β. $υ_{cm}\sqrt{5}$ γ. $υ_{cm}\sqrt{5}/2$ δ. $\sqrt{3}\, υ_{cm}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε1.39 Ο τροχός που φαίνεται στο σχήμα έχει ακτίνα R και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα υ_{cm}. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Ζ που απέχει από το έδαφος απόσταση R/3, και βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνάει από το CM είναι:



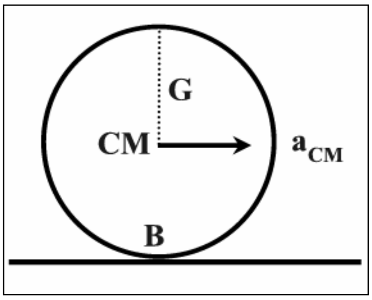
α. $2\upsilon_{cm}/3$ β. $\upsilon_{cm}/3$ γ. υ_{cm} δ. 0

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε1.40 Αυτοκίνητο κινείται επιταχυνόμενα με κατεύθυνση προς τα Δυτικά. Το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης των τροχών του έχει κατεύθυνση προς:

α. Το Βορρά β. Το Νότο γ. Τη Δύση δ. Την Ανατολή
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

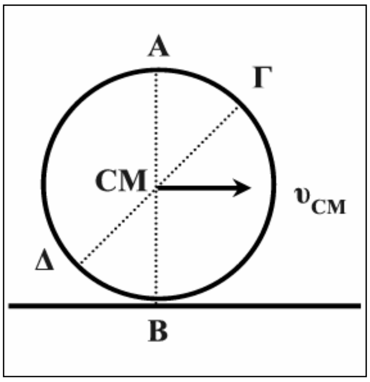
Ε1.41 Τροχός ακτίνας R=0,2m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και το κέντρο μάζας του έχει σταθερή επιτάχυνση $\alpha_{cm}=10m/s^2$.



Ι. Η επιτάχυνση του σημείου Β που εφάπτεται του εδάφους, όταν η ταχύτητα του τροχού είναι 4m/s:
α. $10m/s^2$ β. $0rad/s^2$ γ. $80m/s^2$ δ. $20m/s^2$

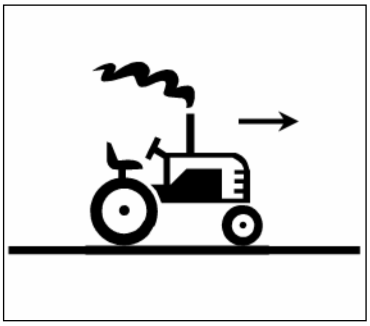
ΙΙ. Η συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου G που απέχει από το κέντρο r=0,1m και βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφο που περνάει από το CM είναι:
α. $15m/s^2$ β. $10m/s^2$ γ. $5m/s^2$ δ. 0
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.42 Ο τροχός του σχήματος, ακτίνας R, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με ταχύτητα κέντρου μάζας σταθερή και ίση με υ_{cm}. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;



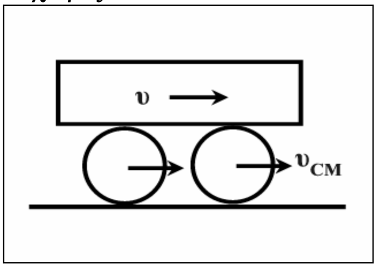
α. Τα σημεία Γ και Δ έχουν ίσες κατά μέτρο συνολικές ταχύτητες.
β. Τα σημεία Α και Β έχουν ίσες γωνιακές ταχύτητες.
γ. Σε χρόνο μιας περιόδου το κέντρο CM διανύει διάστημα 2πR.
δ. Η επιτάχυνση του σημείου Α είναι υ_{cm}^2/R.
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας και στις 4 προτάσεις.

Ε1.43 Το τρακτέρ κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα και οι τροχοί κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;



α. Τα κέντρα μάζας και των δύο τροχών έχουν την ίδια ταχύτητα.
β. Και οι δύο τροχοί περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.
γ. Τα σημεία των τροχών που έχουν την ίδια χρονική στιγμή, απόσταση από το έδαφος ίση με τη διάμετρο των τροχών, έχουν ίσες ταχύτητες.
δ. Σε χρονικό διάστημα Δt οι δύο τροχοί θα έχουν διαγράψει τον ίδιο αριθμό περιστροφών.
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας και στις 4 προτάσεις.

Ε1.44 Οι δύο συμπαγείς όμοιοι κύλινδροι ακτίνας R κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν και μετακινούν το κιβώτιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;



Ι. Το κέντρο μάζας των κυλίνδρων $υ_{cm}$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κιβώτιου, υ έχουν σχέση:

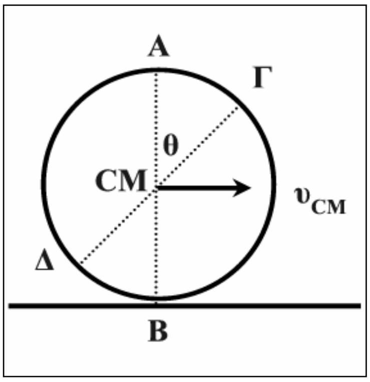
α. $υ_{cm}=υ$ β. $υ_{cm}=υ/2$ γ. $υ_{cm}=2υ$

ΙΙ. Όταν οι κύλινδροι έχουν κάνει μια πλήρη περιστροφή το κιβώτιο θα έχει μετατοπιστεί κατά :

α. 2πR β. 4πR γ. πR

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.45 Ο τροχός του σχήματος ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}$. Να δικαιολογήσετε αν οι προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες.



α. Σε χρόνο μιας περιόδου, το κέντρο μάζας που κινείται με $υ_{cm}$ μετατοπίζεται οριζόντια κατά 2πR. Από αυτό συνεπάγεται ότι το σημείο Α που έχει ταχύτητα $2υ_{cm}$, στον ίδιο χρόνο, θα μετατοπίζεται οριζόντια κατά 4πR.

β. Αν η γωνία θ είναι ίση με 60^0 η συνολική ταχύτητα του σημείου Γ έχει εκείνη τη στιγμή μέτρο ίσο με $υ_{cm}\sqrt{3}$.

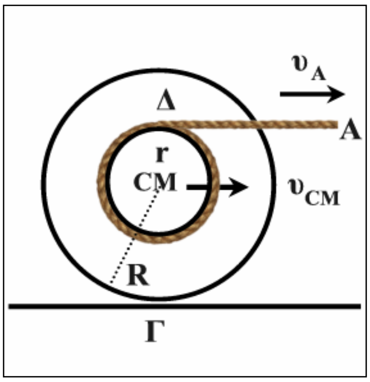
γ. Αφού η κίνηση του τροχού είναι ομαλή, η συνολική επιτάχυνση του σημείου Γ είναι μηδέν.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.46 Στο σχήμα φαίνεται μια τροχαλία ακτίνας R ενώ το αυλάκι στο οποίο είναι τυλιγμένο το νήμα έχει ακτίνα r<R. Τραβάμε το άκρο Α του νήματος με σταθερή ταχύτητα, $υ_A$, το νήμα ξετυλίγεται και η τροχαλία κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

Ι. Το σημείο Δ της τροχαλίας που απέχει απόσταση r από το CM, έχει ταχύτητα:

α. Ίση με $υ_A$ β. Μικρότερη από $υ_A$ γ. Ίση με $2υ_A$



ΙΙ. Η ταχύτητα του σημείου Δ σε σχέση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

α. Μεγαλύτερη β. Ίση γ. Μικρότερη

ΙΙΙ. Η σχέση που συνδέει την ταχύτητα $υ_A$ με τη $υ_{cm}$ είναι:

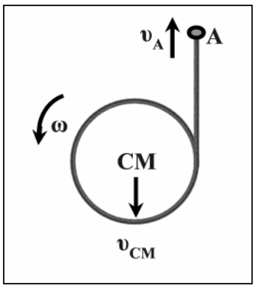
α. $υ_A=υ_{cm}\frac{R+r}{R}$ β. $υ_A=υ_{cm}\frac{R+r}{r}$ γ. $υ_{cm}=υ_A\cdot\frac{R+r}{R}$

IV. Στο χρονικό διάστημα που χρειάζεται η τροχαλία για να κάνει μια πλήρη περιστροφή, το άκρο Α του νήματος θα έχει μετατοπιστεί ως προς το έδαφος, κατά:

α. s=2πR β. s=2π(R+r) γ. s=2πr

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας και στις 4 προτάσεις.

Ε1.47 Στο «γιο–γιο» ακτίνας R που φαίνεται στο σχήμα, καθώς το σχοινί ξετυλίγεται, το άκρο του σχοινιού Α ανεβαίνει προς τα πάνω, ενώ το κέντρο μάζας του «γιο–γιο» , CM, πέφτει προς τα κάτω. Αν κάποια χρονική στιγμή t τα σημεία Α και CM έχουν αντιστοίχως ταχύτητες με μέτρα υ_A και υ_{CM} και το γιο–γιο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, τότε ισχύει η σχέση:



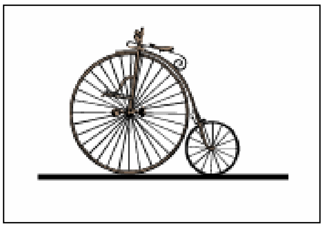
α. $\upsilon_A=\upsilon_{CM}+\omega R$ β. $\upsilon_A+\upsilon_{CM}=\omega R$ γ. $\upsilon_{CM}=\upsilon_A+\omega R$

ΙΙ. Αν τα σημεία Α και CM ανεβαίνουν και τα δύο με σταθερές επιταχύνσεις α_A, α_{CM}, ενώ ο τροχός του «γιο–γιο» περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γν}$, τότε ισχύει η σχέση:

α. $\alpha_{CM}=\alpha_{γν}R-\alpha_A$ β. $\alpha_{CM}=\alpha_A+\alpha_{γν}R$ γ. $\alpha_{CM}=\alpha_A-\alpha_{γν}R$

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.48 Το ποδήλατο που φαίνεται στο σχήμα έχει ακτίνα μπροστινής ρόδας $R_1=1m$ και της πίσω $R_2=0{,}5m$.



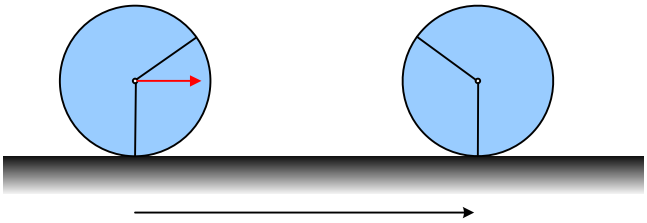
Ι. Αν το ποδήλατο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=10m/s τότε σε χρονικό διάστημα Δt=20s η μπροστινή και η πίσω ρόδα θα έχουν διαγράψει αντίστοιχα, πλήθος περιστροφών:
α. 100/π περιστροφές και οι δύο.
β. $N_1=100/\pi$ και $N_2=200/\pi$ περιστροφές.
γ. $N_1=100/\pi$ και $N_2=50/\pi$ περιστροφές.
ΙΙ. Αν το ποδήλατο επιταχύνεται έτσι ώστε η γωνιακή ταχύτητα της πίσω ρόδας να αυξάνεται κατά 10rad/s το κάθε 1s, τότε η γωνιακή ταχύτητα της μπροστινής ρόδας αυξάνεται κατά:
α. 5rad/s κάθε 1 s β. 10rad/s κάθε 1s γ. 20rad/s κάθε 1s
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε1.49 Αυτοκίνητο κινείται επιβραδυνόμενα με κατεύθυνση προς το Βορρά. Το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης των τροχών του έχει κατεύθυνση προς:
α. Το Βορρά β. Το Νότο γ. Τη Δύση δ. Την Ανατολή
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε1.50 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένας τροχός που κινείται. Σε ποια ή ποιες περιπτώσεις ο τροχός:

i) εκτελεί μόνο στροφική κίνηση; ii) κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;
iii) μεταφέρεται χωρίς να στρέφεται. iv) εκτελεί σύνθετη κίνηση.
v) στρέφεται αλλά και ολισθαίνει vi) σπινάρει.

Ε1.51 Ο τροχός του σχήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_{cm}=υ$. Όταν ο άξονας του τροχού μετακινείται οριζόντια κατά Δx, έχουμε την εικόνα που βλέπετε, όπου για πρώτη φορά, το σημείο Β παίρνει τη θέση του σημείου Α και το μήκος του τόξου ΑΒ=Δs= ½ Δx.

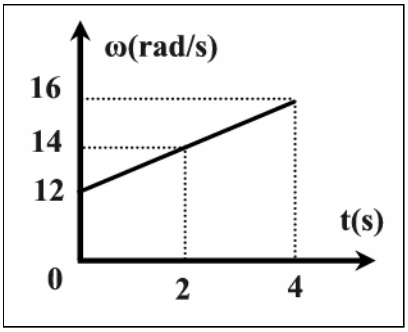


Αν R η ακτίνα του τροχού, τότε η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο:

i) $ω=υ/R$ ii) $ω=υ/2R$ iii) $ω=2υ/R$

(Α) Ασκήσεις και προβλήματα

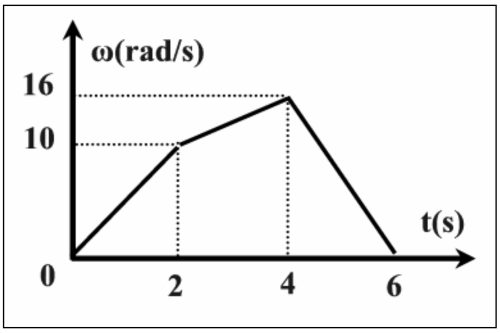
Α1.1 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν, μεταβάλλεται με το χρόνο όπως στη γραφική παράσταση του σχήματος. Να υπολογιστούν:



α. Η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γν}$.
β. Η γωνία στροφής του τροχού από 2s έως 4s.
γ. Ο αριθμός των περιστροφών του τροχού από t_0=0 έως t=4s.

α. 1rad/s², β. 30rad, γ. 28/π στροφές

Α1.2 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού μεταβάλλεται όπως στη γραφική παράσταση του σχήματος.



α. Να βρεθούν οι τιμές της γωνιακής επιτάχυνσης από 0 έως 6s.
β. Να γίνει η γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.
γ. Να βρεθεί η γωνία στροφής του τροχού στο χρονικό διάστημα από 0 έως 6s.
δ. Σε ποια χρονική στιγμή το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης αλλάζει φορά;

α. 5rad/s², 3rad/s², –8rad/s², β. 52rad

Α1.3 Δίσκος ακτίνας R=0,2m περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση και έχει τη χρονική στιγμή t_1=2s γωνιακή ταχύτητα ω_1=20rad/s και τη χρονική στιγμή t_2=4s, ω_2=40rad/s.
α. Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση ενός σημείου του τροχού.
β. Πόση ταχύτητα έχει ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού τη χρονική στιγμή t=3s;
γ. Πόση γωνία έχει διαγράψει ένα σημείο του τροχού από τα 2s έως τα 4s;
δ. Πόση είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1=2s.

α. 10rad/s², β. 6 m/s, γ. 60rad, δ. 80m/s²

Α1.4 Ο δίσκος του πικάπ ακτίνας r=20cm περιστρέφεται με συχνότητα f=10/πHz όταν ξαφνικά σβήνει το μοτέρ που τον κινεί και έτσι αυτός επιβραδύνεται ομαλά και σταματάει μετά από Ν=20/π περιστροφές, από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται.
α. Πόση είναι η γωνιακή επιβράδυνση του δίσκου;
β. Πόση είναι η εφαπτομενική επιβράδυνση ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού;
γ. Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο τροχός για να σταματήσει;

α. $\alpha_{γν}$= 5rad/s², β. α=1m/s², γ. t=4s

Α1.5 Τροχός, που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, έχει τη χρονική στιγμή t_0=0, γωνιακή ταχύτητα ω_0=20rad/s και επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό 2rad/s² μέχρι να σταματήσει. Να υπολογιστούν :
α. Ο συνολικός χρόνος κίνησης.
β. Η συνολική γωνία που διέγραψε κάθε σημείο του.
γ. Το πλήθος των περιστροφών που έκανε μέχρι να σταματήσει .

α. 10s, β. 100rad, γ. 50/π στροφές

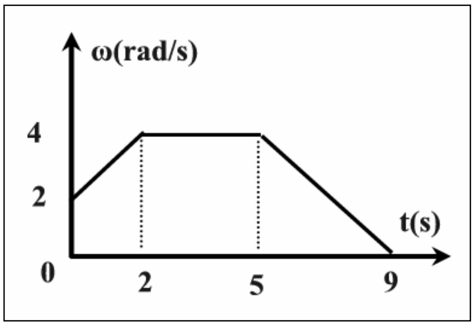
Α1.6 Δίσκος ακτίνας R=0,2m αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0=0$ να περιστρέφεται με $\omega_0=0$, $\theta_0=0$ και σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}=2rad/s^2$. Τη χρονική στιγμή $t_1=4s$ και για 2s μετά κινείται ομαλά με την ταχύτητα που απέκτησε και τέλος επιβραδύνεται και σταματά τη χρονική στιγμή $t_3=8s$.
α. Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός περιστροφών του δίσκου στη διάρκεια των 8s.
β. Πόση είναι η συνολική επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας τη χρονική στιγμή t=3s;
γ. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις (ω−t), ($\alpha_{\gamma\nu}$-t) και (θ−t).

α. N=20/π στροφές, β. $\alpha_{o\lambda}=7,203m/s^2$

Α1.7 Η κορυφή του ωροδείκτη ενός ρολογιού μετατοπίζεται κατά 15,7cm σε χρόνο 1min. Να υπολογίσετε:
α. Το μήκος του ωροδείκτη.
β. Τη γραμμική ταχύτητα του μέσου του ωροδείκτη;

α. r=1,5m, β. $\upsilon=1,3,10^{-3}m/s$

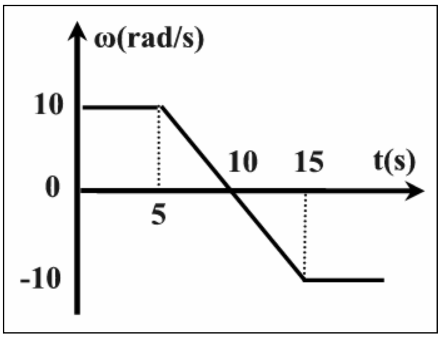
Α1.8 Τροχός αρχίζει να περιστρέφεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ με γωνιακή ταχύτητα που μεταβάλλεται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Η περιστροφή γίνεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν. Σημείο Α του τροχού που απέχει από τον άξονα περιστροφής r=0,2m, βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ σε γωνιακή θέση $\theta_0=0$.



α. Πόση είναι η συνολική γωνία που έχει διαγράψει το σημείο Α τη χρονική στιγμή t=9s;
β. Πόσες περιστροφές έχει κάνει ο τροχός στο ίδιο χρονικό διάστημα;
γ. Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή που να αλλάζει φορά η γωνιακή ταχύτητα και αν ναι ποια;
δ. Σε ποια χρονική στιγμή, η γωνιακή επιτάχυνση γίνεται για πρώτη φορά αρνητική;
ε. Πόση είναι η ταχύτητα του Α τη χρονική στιγμή t=5s;
στ. Πόση είναι η εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου Α τη χρονική στιγμή t=8s;
ζ. Πόση είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Α τη χρονική στιγμή t=6s;
η. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των μεταβολών της γωνιακής επιτάχυνσης, $\alpha_{\gamma\nu}$ και της γωνιακής θέσης, θ, και της γραμμικής ταχύτητας, του σημείου Α σε σχέση με το χρόνο, t.

α. Δθ=26rad, β. N=4,14στροφές, ε. υ=0,8m/s, στ. $\alpha=-0,2m/s^2$, ζ. $\alpha_\kappa=1,8m/s^2$

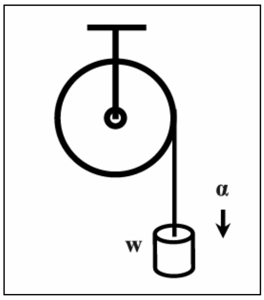
Α1.9 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα μεταβάλλεται με τον τρόπο που φαίνεται στο διάγραμμα.



α. Σε ποια χρονική στιγμή αλλάζει η φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας;
β. Σε ποια χρονική στιγμή αλλάζει η φορά της γωνιακής επιτάχυνσης;
γ. Πόσες στροφές έχει κάνει στο χρονικό διάστημα (0,15s);
δ. Πόση είναι η γωνιακή μετατόπιση από τη χρονική στιγμή t=0 έως ότου να γίνει η γωνιακή ταχύτητα ω=−4rad/s;
ε. Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση της χρονικής στιγμή t=10s;

γ. N=50/π στροφές δ. Δθ=71rad/s, ε. $\alpha_{\gamma\nu}=-2rad/s$

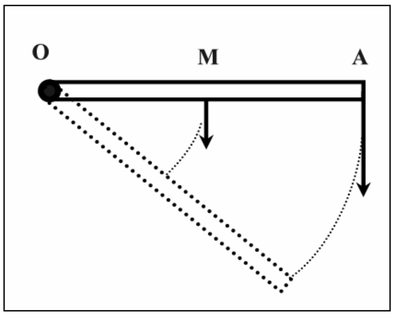
□**A1.10** Το βαρίδι, w, που είναι δεμένο στο σχοινί της τροχαλίας αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα τη χρονική στιγμή $t_0=0$ με σταθερή επιτάχυνση $\alpha=2m/s^2$ και αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=0$, ενώ το σχοινί ξετυλίγεται. Το κέντρο μάζας της τροχαλίας είναι ακίνητο και η ακτίνα της είναι R=0,2m.



α. Σε πόσο χρόνο, t, το σχοινί έχει ξετυλιχτεί κατά Δλ=16m;
β. Πόση είναι η μετατόπιση του σώματος, w, κατά τη διάρκεια του 3ου δευτερόλεπτου της πτώσης του;
γ. Πόση γωνία έχει διαγράψει μια ακτίνα της τροχαλίας από t_0 έως $t_1=4s$;
δ. Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας τη χρονική στιγμή $t_2=6s$;

α. t=4s, β. Δλ=5m, γ. θ=80rad, δ. ω=60rad/s

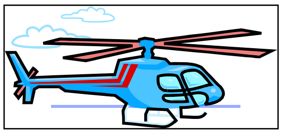
□**A1.11** Η ράβδος του σχήματος μήκους λ=0,2m περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}=0,2rad/s^2$ γύρω από το ένα άκρο της, Ο. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το μέσον της Μ έχει ταχύτητα $\upsilon_{0,M}=0,4m/s$.



α. Ποια χρονική στιγμή t_1 η ράβδος θα έχει γωνιακή μετατόπιση Δθ=50rad;
β. Πόση θα είναι η ταχύτητα του άκρου Α τη χρονική στιγμή t_1;
γ. Πόσες περιστροφές θα έχει διαγράψει το σημείο Μ στο χρονικό διάστημα $0-t_1$;
δ. Πόση θα είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Μ τη χρονική στιγμή $t_2=5s$;
ε. Ποια είναι η κατεύθυνση και ποιο το σημείο εφαρμογής των διανυσμάτων, της γωνιακής ταχύτητας, της γωνιακής επιτάχυνσης και της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Μ;

α. $t_1=10s$, β. υ=1,2m/s, γ. N=25/π στρ, δ. $\alpha_{\kappa,M}=2,5m/s^2$

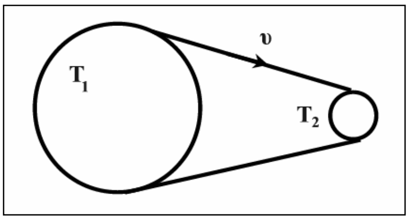
□**A1.12** Η έλικα ενός ακίνητου ελικόπτερου ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t_0=0$ με $\omega_0=0$ και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\nu}=10rad/s^2$.



α. Πόση θα είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου, Α, της έλικας που απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση, r=2m, τη χρονική στιγμή που η έλικα έχει διαγράψει γωνία θ=2rad;
β. Να εκφραστεί η συνολική επιτάχυνση του σημείου, Α, σε σχέση με το χρόνο, t.

α. $\alpha_\kappa=80m/s^2$, β. $\alpha_{o\lambda}=20\sqrt{100t^4+1}$ (S.I)

□**A1.13** Οι δύο τροχοί ακτίνων $R_1=20cm$ και $R_2=4cm$ συνδέονται με ιμάντα και περιστρέφονται έτσι ώστε ένα σημείο του ιμάντα να κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Αν ο τροχός T_1 έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=2rad/s$ να υπολογιστούν:



α. Η γωνιακή ταχύτητα ω_2 του άλλου τροχού T_2.
β. Το πλήθος των περιστροφών που θα έχει διαγράψει ο κάθε τροχός σε Δt=10s.
γ. Το μήκος που θα έχει διανύσει ένα σημείο του ιμάντα στο ίδιο χρονικό διάστημα.

α. $\omega_2=10rad/s$, β. $N_1=10/\pi$ στρ. $N_2=50/\pi$ στρ. γ. s=4m

□**Α1.14** Αυτοκίνητο έχει τροχούς ακτίνας R=0,4 m και κινείται με σταθερή ταχύτητα 40m/s. Να υπολογιστούν:
α. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού.
β. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού.
γ. Η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας τη χρονική στιγμή που απέχει από το έδαφος απόσταση ίση με 0,8m.
δ. Η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας τη χρονική στιγμή που απέχει από το έδαφος απόσταση ίση με 0,4m .
ε. Η γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής ενός σημείου του τροχού που απέχει απόσταση 0,1m από το κέντρο.

α. 40m/s, β. 100rad/s, γ. 80m/s, δ. $40\sqrt{2}$*m/s, ε. 10m/s*

□**Α1.15** Αυτοκίνητο έχει τροχούς ακτίνας R=0,4 m και κινείται με σταθερή ταχύτητα, ενώ οι τροχοί του περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα 50rad/s. Να υπολογιστούν:
α. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του αυτοκίνητου.
β. Η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού.
γ. Η ταχύτητα ενός σημείου G του τροχού τη χρονική στιγμή που απέχει από το έδαφος 0,4m και από το κέντρο του τροχού 0,1m.
δ. Ο αριθμός των περιστροφών του τροχού, όταν αυτός θα έχει διατρέξει διάστημα s=80π m.
ε. Ο λόγος των ταχυτήτων $υ_Δ/υ_Z$ δύο σημείων Δ και Ζ που βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφο που περνάει από το κέντρο μάζας, το Δ από πάνω από το CM και το Ζ από κάτω και απέχουν από αυτό ίσες αποστάσεις r=0,2m.

α. υ=20 m/s, β. $α_κ=10^3 m/s^2$*, γ.* $υ_G$*=20,62m/s, δ. Ν=100 περιστροφές, ε.* $υ_Δ/υ_Z=3$

□**Α1.16** Αυτοκίνητο με τροχούς ακτίνας r=30cm διαγράφει κυκλική πίστα ακτίνας R=96m σε 20s, με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα.
α. Πόση είναι η συχνότητα περιστροφής των τροχών του;
β. Πόσες περιστροφές έχει διαγράψει η ρόδα του αυτοκινήτου μέσα στον ίδιο χρόνο που το αυτοκίνητο έχει διαγράψει 10 φορές την κυκλική πίστα;

α. f=16Hz, β. $N_ρ$*=3200στροφές*

□**Α1.17** Τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα κέντρου μάζας του τροχού στις εξής περιπτώσεις:
α. Σημείο της περιφέρειας του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου $υ=4\sqrt{2}$m/s κάθε χρονική στιγμή που απέχει από το οριζόντιο επίπεδο απόσταση ίση με R.
β. Δύο σημεία που απέχουν ίσες αποστάσεις από το κέντρο και βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο έχουν ταχύτητες $υ_1$=10m/s και $υ_2$=8m/s αντιστοίχως.
γ. Σημείο που βρίσκεται πάνω από το κέντρο και στην κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο αυτό, απέχει από το κέντρο απόσταση R/4 και έχει ταχύτητα $υ_3$=4m/s.

α. 4m/s β. 9m/s, γ. 3,2m/s

□**Α1.18** Τροχός ποδηλάτου ακτίνας R=0,25m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και έχει τη χρονική στιγμή t=0 ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{0,cm}$=5m/s. Ο τροχός επιβραδύνεται και σταματά αφού το ποδήλατο έχει διανύσει διάστημα s=2,5m. Να υπολογιστούν:
α. Η επιβράδυνση του κέντρου μάζας.
β. Η γωνιακή επιβράδυνση του τροχού.

γ. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ο τροχός για να σταματήσει.
δ. Η εφαπτομενική επιβράδυνση κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού όταν αυτό απέχει από το έδαφος απόσταση 2R.
ε. Η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού το οποίο απέχει από το έδαφος, απόσταση R, τη χρονική στιγμή t= 0,2s.
στ. Η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού τη χρονική στιγμή t=0,5s.

α. $5m/s^2$, β. $20rad/s^2$, γ. 1s, δ. $10m/s^2$ ε. $4\sqrt{2}m/s$, στ. $25m/s^2$

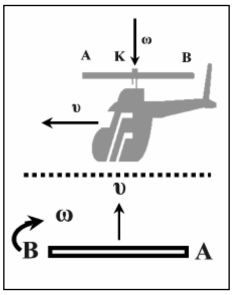
□**Α1.19** Τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}$, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστεί, συναρτήσει της R, η απόσταση από το οριζόντιο επίπεδο, ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού που έχει ταχύτητα:
α. $υ_1=0$ β. $υ_2=2υ_{cm}$
γ. $υ_3=\sqrt{2}υ_{cm}$ δ. $υ_4=υ_{cm}$

α. 0, β. 2R, γ. R, δ. R/2

□**Α1.20** Αυτοκίνητο με τροχούς ακτίνας r=0,4m επιταχύνεται από την ηρεμία με τη μέγιστη δυνατή σταθερή επιτάχυνση και αποκτάει ταχύτητα υ=40m/s σε 8s. Να υπολογιστούν:
α. Η γωνιακή επιτάχυνση των τροχών του.
β. Οι περιστροφές που κάνει μια ακτίνα των τροχών του μέχρι η ταχύτητα να γίνει 20m/s.
γ. Ο αριθμός των περιστροφών του τροχού κατά το 4^o sec της κίνησης.
δ. Η επιτάχυνση του σημείου που τροχού που εφάπτεται του δρόμου, τη χρονική στιγμή t=8s.

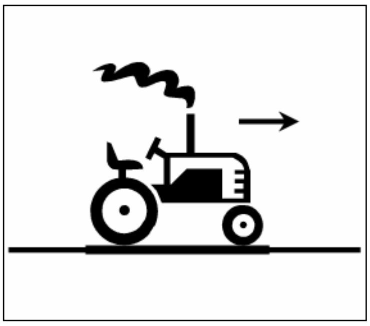
α. $α_{γν}=12,5rad/s^2$ β. N=50/π στρ. γ.N'=21,875/π στρ. δ. $4\cdot 10^3 m/s^2$

□**Α1.21** Το ελικόπτερο του σχήματος κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα υ=30m/s, ενώ η έλικα διαμέτρου 2r περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.
Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου Β τη χρονική στιγμή που η έλικα είναι κάθετη στην κατεύθυνση της υ και το άκρο Α έχει ταχύτητα μέτρου 20m/s, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



$υ_B=80m/s$

□**Α1.22** Το τρακτέρ ξεκινάει από την ηρεμία τη χρονική στιγμή t=0 και κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση $α=2m/s^2$. Οι τροχοί του έχουν ακτίνες $R_1=1m$ και $R_2=0,5m$ και κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Να υπολογιστούν:



α. Οι ταχύτητες των σημείων των τροχών που έχουν την ίδια χρονική στιγμή t=10s, απόσταση από το έδαφος ίση με τη διάμετρο των τροχών.
β. Ο λόγος των περιστροφών N_1/N_2 που κάνουν οι ρόδες στο χρονικό διάστημα (0–t).
γ. Οι γωνιακές ταχύτητες των τροχών τη χρονική στιγμή t=10s.

α. 40m/s, β. $N_1/N_2=1/2$, γ. $ω_1=20rad/s$, $ω_2=40rad/s$

□**Α1.23** Μια μπάλα ακτίνας R=0,1m, που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, αρχίζει να ανεβαίνει ένα κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή επιβράδυνση του κέντρου μάζας μέτρου $\alpha_{cm}=4m/s^2$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το κέντρο μάζας έχει ταχύτητα $\upsilon_{0,cm}=8m/s$.

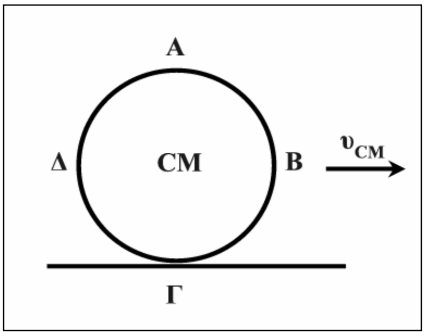
α.Να βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας όταν θα έχει διαγράψει N=30/π περιστροφές.

β. Να βρείτε πόσες περιστροφές θα έχει διαγράψει η σφαίρα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

γ. Αν και κατά την κάθοδο της μπάλας ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του κέντρου μάζας παραμένει κατά μέτρο ο ίδιος με την άνοδο, πόσος είναι ο συνολικός αριθμός περιστροφών της μπάλας από $t_0=0$ έως t=3s;

α. υ=4m/s, β. N=40/π στρ. $N_{ολ}$=50/π στρ.

□**Α1.24** Τροχός ακτίνας R=0,5m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Το κέντρο μάζας του κινείται με ταχύτητα που μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $\upsilon_{cm}=4+2t$ (S.I).



α. Πόση είναι η γωνιακή του επιτάχυνση;

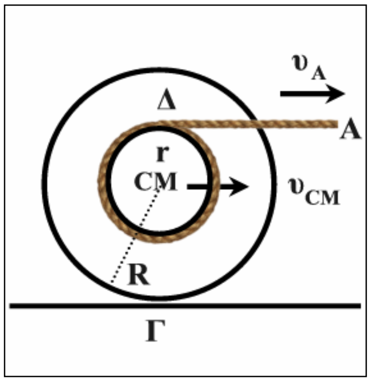
β. Με πόση ταχύτητα κινούνται τη χρονική στιγμή t=3s τα σημεία Α, Β, Γ;

γ. Πόσες περιστροφές κάνει ο τροχός από τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ έως τη $t_2=4s$;

δ. Πόση είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας τη χρονική στιγμή $t_1=2s$;

α. $\alpha_{γν}=4rad/s^2$, β. $\upsilon_A=20m/s$, $\upsilon_Γ=0$, $\upsilon_B=10\sqrt{2}m/s$, γ. N=20/π περιστροφές, δ. $\alpha_κ=128m/s^2$

□**Α1.25** Στο σχήμα φαίνεται μια τροχαλία ακτίνας R ενώ το αυλάκι στο οποίο είναι τυλιγμένο το νήμα έχει ακτίνα r=R/2. Τραβάμε το νήμα από το άκρο Α με σταθερή ταχύτητα, υ_A, αυτό ξετυλίγεται και η τροχαλία κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αν το σημείο Α διανύει σε χρονικό διάστημα Δt=0,5s απόσταση dx=3m να υπολογιστούν:



α. Η ταχύτητα του CM της τροχαλίας.

β. Η μετατόπιση του CM της τροχαλίας στο ίδιο χρονικό διάστημα.

γ. Η οριζόντια μετατόπιση του σημείου Γ της τροχαλίας, στο ίδιο χρονικό διάστημα.

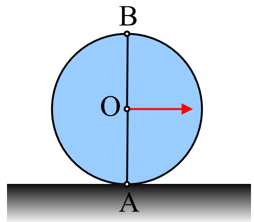
α. $\upsilon_{cm}=4m/s$, β. $\Delta x_{CM}=2m$, γ. $\Delta x_Γ=2m$

□**Α1.26** Δίσκος ακτίνας R=1m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της ταχύτητας ενός σημείου του δίσκου που απέχει απόσταση 2R από το δάπεδο είναι 20m/s.

α. Ένα σημείο του δίσκου που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το κέντρο μάζας έχει την ίδια χρονική στιγμή ταχύτητα 15m/s. Πόση είναι η απόσταση του σημείου αυτού από το δάπεδο;

β. Αν τη χρονική στιγμή t_2 το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου έχει διπλασιαστεί τότε πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας την ίδια χρονική στιγμή t_2;

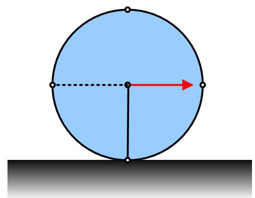
α. 1,5m, β. 20m/s



Ο τροχός του σχήματος, ακτίνας R=0,8m ανήκει σε ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha=1m/s^2$ και ξεκίνησε από την ηρεμία. Οι τροχοί του αυτοκινήτου κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν.

vii) Να σχεδιάστε στο σχήμα τις επιταχύνσεις των σημείων Α, Β και του σημείου Ο του άξονα, τη στιγμή t=0, όπου τα σημεία Α και Β είναι στα άκρα μιας κατακόρυφης διαμέτρου του τροχού και να υπολογίστε τα μέτρα τους.

viii) Να υπολογίστε το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος (σημείο Α) τη στιγμή που το αυτοκίνητο έχει ταχύτητα 4m/s. Σχεδιάστε την επιτάχυνση αυτή στο διπλανό σχήμα.



Σχεδιάστε επίσης στο σχήμα το διάνυσμα της γωνιακή επιτάχυνσης του τροχού.

ix) Τα σημεία Γ και Δ είναι στα άκρα μιας οριζόντιας διαμέτρου τη στιγμή που η ταχύτητα του σημείου Β έχει μέτρο 4m/s. Να σχεδιάστε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα και να υπολογίστε τα μέτρα τους:

Α) της ταχύτητας του σημείου Γ

Β) της επιτάχυνσης του σημείου Δ.

2. Ροπή δύναμης - Ισορροπία στερεού σώματος

(Ε) Ερωτήσεις

Ε2.1 Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις πουν ακολουθούν:
α. Το φυσικό μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα ονομάζεται ……….της…………. και συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα …
β. Ροπή δύναμης F , ως προς άξονα περιστροφής ονομάζεται το ……………….μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της ………….. επί την …………. απόσταση της δύναμης από τον …………. περιστροφής.
γ. Η ροπή έχει τη διεύθυνση του …………….. …………….. και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του …………….. κοχλία.
δ. Μονάδα μέτρησης της ροπής είναι το 1…..

Ε2.2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:
α. Δύο ………….. δυνάμεις F_1, F_2 με ………μέτρα που στρέφουν το σώμα κατά την ίδια ………, αποτελούν ζεύγος δυνάμεων.
β. Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι …………ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.
γ. Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις θα πρέπει η συνισταμένη δύναμη να είναι ………… και το αλγεβρικό άθροισμα των ………….. ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι ……….
δ. Αν το ζεύγος δυνάμεων αποτελείται από δυνάμεις μέτρου F των οποίων οι φορείς απέχουν απόσταση d, το μέτρο της ροπής του ζεύγους είναι ίσο με, τ=…..

Ε2.3 Μια δύναμη $\vec{F}$ έχει απόσταση d από ένα σημείο Ο. Η ροπή της δύναμης, ως προς το Ο είναι:
α. Μονόμετρο μέγεθος ίσο με F·d.
β. Διανυσματικό μέγεθος με μέτρο F,d, σημείο εφαρμογής ίδιο με της δύναμης F, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η F και η d και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.
γ. Διανυσματικό μέγεθος με μέτρο F·d, σημείο εφαρμογής το σημείο Ο, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η F και η d και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.
δ. Κανένα από τα παραπάνω.

Ε2.4 Η ροπή δύναμης ως προς άξονα:
α. Είναι μηδέν, αν ο φορέας της δύναμης δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα.
β. Είναι μέγιστη, αν ο άξονας είναι παράλληλος με το φορέα της δύναμης.
γ. Είναι μηδέν, αν ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα.
δ. Είναι μηδέν μόνο αν ο φορέας της δύναμης τέμνει κάθετα τον άξονα.

Ε2.5 Ένα ζεύγος δυνάμεων αποτελείται από δύο:
α. Αντίθετες δυνάμεις.
β. Ίσες δυνάμεις με παράλληλους φορείς.
γ. Δυνάμεις με ίσα μέτρα, αντίθετη κατεύθυνση και παράλληλους φορείς.

δ. Δυνάμεις με ίσα μέτρα και με συνολική ροπή μηδέν.
ε. Τίποτα από τα παραπάνω.

Ε2.6 Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ των οποίων οι φορείς απέχουν απόσταση d:
α. Είναι διανυσματικό μέγεθος με μέτρο F_1,d και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δυνάμεων.
β. Εξαρτάται από τη θέση του σημείου του επιπέδου τους ως προς το οποίο υπολογίζεται.
γ. Είναι διανυσματικό μέγεθος με μέτρο F_1,d και φορέα πάνω στο επίπεδο των δυνάμεων.
δ. Είναι διανυσματικό μέγεθος με μέτρο (F_1+F_2),d και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δυνάμεων.

Ε2.7 Όταν σε ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, η αλγεβρική τιμή της συνολικής ροπής ως προς άξονα είναι ίση με:
α. Μηδέν.
β. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον ίδιο άξονα.
γ. Το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον ίδιο άξονα.
δ. Κανένα από τα παραπάνω.

Ε2.8 Δύναμη $\vec{F}$ ασκείται σε σώμα που ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.
α. Αν ο φορέας της δύναμης περνά από το κέντρο μάζας το σώμα κάνει μόνο στροφική κίνηση.
β. Αν ο φορέας της δύναμης δεν περνά από το κέντρο μάζας το σώμα κάνει μόνο στροφική κίνηση.
γ. Αν ο φορέας της δύναμης δεν περνά από το κέντρο μάζας το σώμα κάνει στροφική και μεταφορική κίνηση.
δ. Αν ο φορέας της δύναμης περνά από το κέντρο μάζας, το σώμα ισορροπεί.

Ε2.9 Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισορροπεί ένα σώμα είναι:
α. Η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδέν.
β. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τυχαίο σημείο να είναι μηδέν.
γ. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας να είναι μηδέν.
δ. Το α και το β μαζί.
ε. Το α και το γ μαζί.

Ε2.10 Στερεό σώμα είναι αρχικά ακίνητο. Να αντιστοιχήσετε τις κινήσεις της αριστερής στήλης με τις συνθήκες της δεξιάς:

α. Ισορροπία	1. $\Sigma\vec{F}=0$, $\Sigma\tau$?0
β. Μόνο μεταφορική	2. $\Sigma\vec{F}$?0, $\Sigma\tau=0$
γ. Μόνο περιστροφική	3. $\Sigma\vec{F}$?0, $\Sigma\tau$?0
δ. Μεταφορική και περιστροφική	4. $\Sigma\vec{F}=0$, $\Sigma\tau=0$

Ε2.11 Όταν ένα σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας τότε:
α. Δεν δέχεται καμία δύναμη.
β. Η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν.
γ. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς κάθε σημείο είναι μηδέν.
δ. Η αλγεβρική τιμή της συνολικής ροπής είναι θετική ή αρνητική.

Ποιες από τις προτάσεις είναι σωστές;

Ε2.12 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν και αναφέρονται στο ζεύγος δυνάμεων είναι σωστές;
α. Δύο οποιεσδήποτε αντίρροπες δυνάμεις που δρουν στο ίδιο σώμα μπορούν να αποτελούν ζεύγος δυνάμεων.
β. Η ροπή ζεύγους έχει μέτρο $\tau = F \cdot d$, όπου F το μέτρο της κάθε δύναμης του ζεύγους και d η απόσταση των φορέων τους.
γ. Το διάνυσμα της ροπής του ζεύγους βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τις δυνάμεις του ζεύγους.
δ. Το μέτρο της ροπής ενός ζεύγους δυνάμεων δεν εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής του σώματος.

Ε2.13 Δώστε σύντομη αιτιολογημένη απάντηση στις ερωτήσεις που ακολουθούν:
α. Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι πιο αποτελεσματική από τη ροπή μιας δύναμης προκειμένου να βιδώσουμε μια βίδα;
β. Γιατί τα φορτηγά έχουν τιμόνι μεγάλης διαμέτρου;
γ. Αν θέλουμε να ξεβιδώσουμε μια πολύ σφιγμένη βίδα με παξιμάδι θα χρησιμοποιήσουμε κλειδί μικρού ή μεγάλου μήκους;
δ. Αν πρόκειται να ξεβιδώσουμε μια βίδα με κλειδί ορισμένου μήκους τι πρέπει να κάνουμε ώστε η ροπή που θα ασκήσουμε να είναι η μεγαλύτερη δυνατή;

Ε2.14 Η ροπή δύναμης περιγράφει την ικανότητα:
α. Ενός σώματος να στρέφεται.
β. Μιας δύναμης να στρέφεται.
γ. Μιας δύναμης να μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.
δ. Μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα.

Ε2.15 Στερεό σώμα, που αρχικά ηρεμεί, δέχεται τη δράση δύο μόνο δυνάμεων που ασκούνται σε διαφορετικά σημεία αυτού. Για να ισορροπεί πρέπει οι δύο δυνάμεις να έχουν:
α. Ίσα μέτρα   β. Ίδιο φορέα   γ. Ίδια φορά
δ. Αντίθετη φορά   ε. Τα α, β και δ   στ. Τα α, β και γ

Ε2.16 Στερεό σώμα μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Το σώμα που αρχικά ηρεμεί, δέχεται τη δράση δύο μόνο δυνάμεων που ασκούνται σε διαφορετικά σημεία αυτού. Για να μην κάνει στροφική κίνηση πρέπει οι δύο δυνάμεις να έχουν:

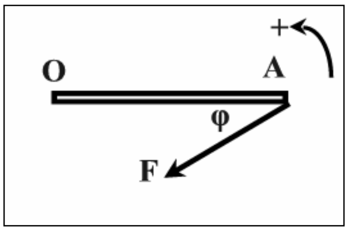
α. Παράλληλους φορείς   β. Ίσες ροπές   γ. Ίσα μέτρα   δ. Αντίθετες ροπές

Ε2.17 Στερεό σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων. Τότε:
α. Οι τρεις δυνάμεις έχουν ίσες ροπές ως προς κάθε σημείο του σώματος.
β. Οι φορείς των δυνάμεων είναι παράλληλοι μεταξύ τους.
γ. Οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο.
δ. Το α και το γ.

Ε2.18 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες;
α. Η ροπή μιας δύναμης της οποίας ο φορέας τέμνει τον άξονα περιστροφής του σώματος είναι μηδέν ως προς τον άξονα αυτόν.
β. Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο που ανήκει στο επίπεδο των δυνάμεων.

γ. Αν σε ένα ακίνητο σώμα που διαθέτει σταθερό άξονα περιστροφής ασκείται μια δύναμη, τότε είναι σίγουρο ότι θα περιστρέφεται.
δ. Όσο πλησιέστερα στον άξονα περιστροφής ενός σώματος ασκήσουμε μια δύναμη τόσο ευκολότερο είναι να το περιστρέψουμε.
ε. Η ροπή μιας δύναμης περιγράφει την ικανότητα της δύναμης να περιστρέψει ένα στερεό.
στ. Δύο αντίρροπες δυνάμεις με ίσα μέτρα και παράλληλους φορείς αποτελούν ζεύγος.
ζ. Σε σώμα που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα ασκούνται δυνάμεις που έχουν συνισταμένη μηδέν. Τότε είναι αδύνατο να περιστρέφεται.
η. Όταν ένα ελεύθερο στερεό σώμα μεταφέρεται χωρίς να περιστρέφεται τότε σίγουρα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν.
θ. Δύναμη σταθερού μέτρου ασκείται σε σημείο Α ενός σώματος που απέχει σταθερή απόσταση από άλλο σημείο Ο αυτού. Το μέτρο της ροπής της δύναμης ως προς το σημείο Ο γίνεται μέγιστο όταν ο φορέας της δύναμης είναι κάθετος στην απόσταση ΟΑ.

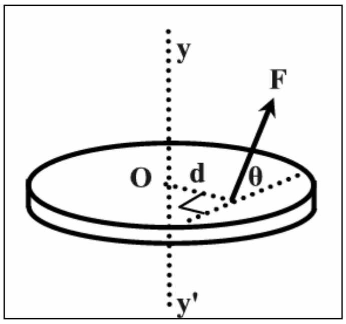
Ε2.19 Η ράβδος ΟΑ μήκους λ, μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η ράβδος και η δύναμη, F. Η ροπή της δύναμης ως προς αυτόν τον άξονα είναι:



α. 0   β. –F·λ   γ. –F·λ·ημφ   δ. –F·λ·συνφ

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

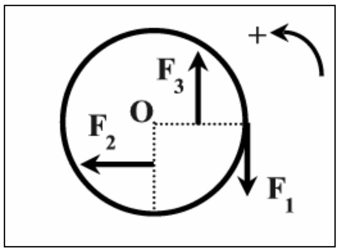
Ε2.20 Το μέτρο της ροπής της δύναμης F ως προς τον άξονα yy΄ ισούται με:



α. 0   β. F·d   γ. F·d·συνθ   δ. F·d·ημθ

όπου d η απόσταση του σημείου εφαρμογής της δύναμης από το κέντρο του τροχού, Ο. Ο φορέας της δύναμης δεν βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια του τροχού, αλλά σχηματίζει γωνία θ με αυτήν. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε2.21 Οι δυνάμεις F_1, F_2, F_3 έχουν μέτρα ίσα με F, ο δίσκος έχει ακτίνα R και τα σημεία εφαρμογής των F_2 και F_3 απέχουν απόσταση R/2 από το κέντρο, Ο. Η συνολική ροπή που ασκείται στο δίσκο, ως προς άξονα που περνάει από το Ο και είναι κάθετος σ΄ αυτόν είναι:

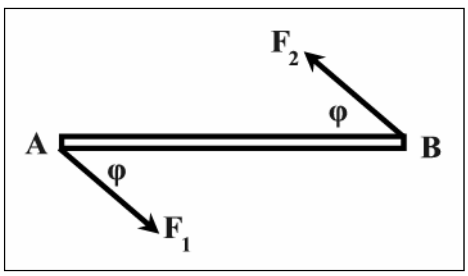


α. –F·R   β. –2F·R   γ. +F·R   δ. 3F·R/2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

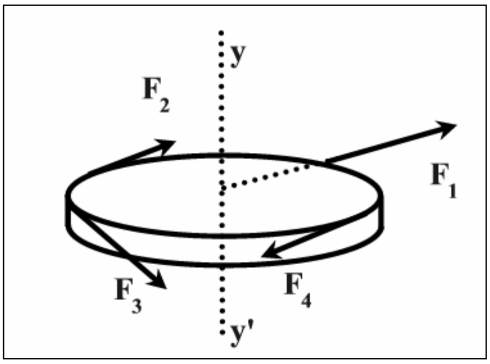
Ε2.22 Στη ράβδο ΑΒ, μήκους λ ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων με $F_1=F_2=F$ και $\varphi=60^0$. Η ροπή του ζεύγους είναι:

α. F·λ   β. $F\lambda\sqrt{3}/2$
γ. F·λ/2   δ. 2F·λ



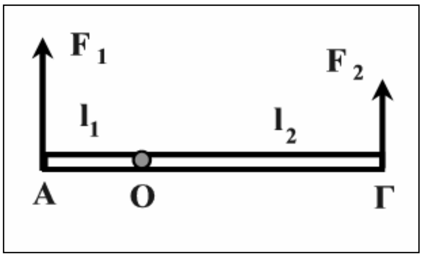
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε2.23 Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα R=1m και μπορεί να στρέφεται γύρω από τον ακλόνητο άξονα yy⁄. Ο τροχός δέχεται 4 δυνάμεις εκ των οποίων οι φορείς των F_2, F_3 και F_4 εφάπτονται στην περιφέρειά του και ο φορέας της F_1 διέρχεται από το κέντρο αυτού. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι F_1=10N, F_2=4N, F_3=8N, F_4=6N.



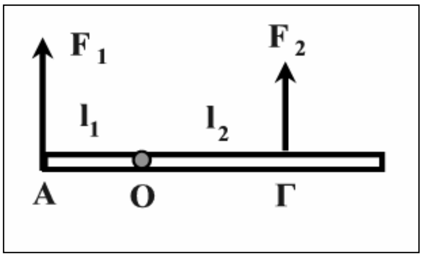
α. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα των ροπών των δυνάμεων.
β. Να βρείτε τη φορά περιστροφής του τροχού.
γ. Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή.

Ε2.24 Δύο δυνάμεις F_1 F_2 ασκούνται στα άκρα Α και Γ της αβαρούς ράβδου μήκους λ της οποίας ο άξονας περιστροφής Ο απέχει από τα Α και Γ αποστάσεις ΟΑ=λ_1, ΟΓ=λ_2 με $\lambda_2=2\lambda_1$. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες; Να δικαιολογηθεί η κάθε απάντηση.



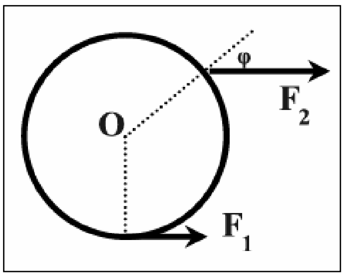
α. Αν η ράβδος ισορροπεί θα πρέπει να είναι $F_1=2F_2$.
β. Αν η είναι $F_1 = 4F_2$ τότε η ράβδος περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.
γ. Αν είναι $F_1=F_2$ η ράβδος περιστρέφεται με φορά αντίθετη από αυτή της φοράς των δεικτών του ρολογιού.
δ. Αν είναι $F_1=F_2$ οι δύο δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων.

Ε2.25 Η αβαρής ράβδος του σχήματος ισορροπεί με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες; Να δικαιολογηθεί η κάθε απάντηση.



α. Για τις δυνάμεις F_1, F_2 και τις αποστάσεις ΟΑ=λ_1 και ΟΓ=λ_2 ισχύει $F_1/F_2=\lambda_1/\lambda_2$.
β. Αν η δύναμη F_2 αντιστραφεί είναι αδύνατο να ισορροπεί η ράβδος.
γ. Αν το μέτρο της δύναμη F_2 αυξηθεί και θέλουμε να διατηρήσουμε την ισορροπία και την κατεύθυνση της δύναμης, θα πρέπει να μετακινήσουμε το σημείο εφαρμογής της, Γ, πλησιέστερα προς το Ο.
δ. Αν το μέτρο της δύναμη F_2 μειωθεί και θέλουμε να διατηρήσουμε την ισορροπία και την κατεύθυνση της δύναμης, θα πρέπει να απομακρύνουμε το σημείο εφαρμογής της, Γ, από το Ο, χωρίς όμως να είναι σίγουρο ότι θα αποκαταστήσουμε την ισορροπία.

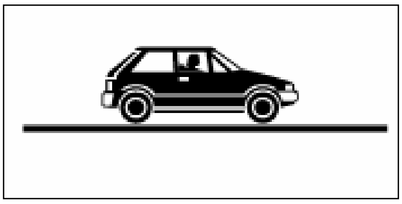
Ε2.26 Ο δίσκος είναι αρχικά ελεύθερος και ακίνητος και μετά δέχεται τις δυνάμεις F_1, F_2. Η γωνία είναι $\varphi=30^0$. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις πρέπει να ισχύει για να κάνει ο δίσκος μόνο μεταφορική κίνηση.



α. $F_1=F_2$ β. $F_1=2F_2$ γ. $F_1=F_2/2$ δ. $F_1=F_2\sqrt{3}/2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε2.27 Η απόσταση μεταξύ του άξονα των πίσω τροχών και του άξονα των μπροστινών τροχών ενός αυτοκινήτου είναι 3m. Το βάρος του αυτοκινήτου κατανέμεται κατά 55% στους πίσω τροχούς και κατά 45% στους μπροστινούς. Το κέντρο βάρους του αυτοκινήτου βρίσκεται σε απόσταση x πίσω από το μπροστινό άξονα:



α. x=1,5m   β. x=1,65m   γ. x=1,45m   δ. 1,0m

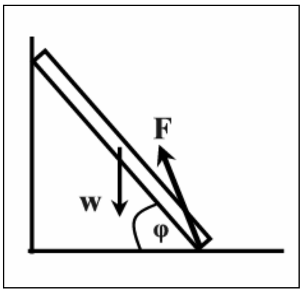
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε2.28 Δύο άτομα μεταφέρουν μια ομοιόμορφη σκάλα μήκους λ=6m και βάρους 500N. Αν ο ένας ασκεί στο ένα άκρο της κατακόρυφη δύναμη μέτρου 200N προς τα πάνω, τότε ο άλλος την κρατά από σημείο που απέχει από το άλλο άκρο απόσταση, x ίση με:

α. x=1m   β. x=2m   γ. x=3m   δ. x=1,5m

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε2.29 Η ομογενής ισοπαχής ράβδος του σχήματος ισορροπεί ακουμπισμένη στον λείο κατακόρυφο τοίχο και στο τραχύ πάτωμα από το οποίο δέχεται δύναμη μέτρου F=4w/3, όπου w το βάρος της ράβδου. Για τη γωνία φ ισχύει:

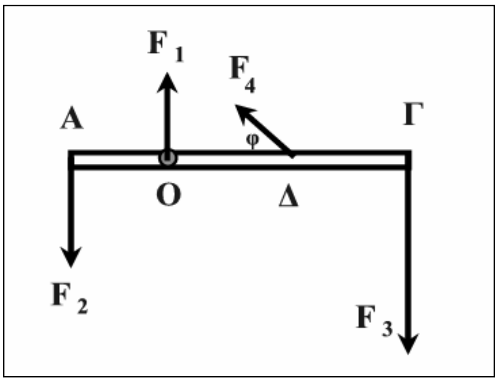


α. εφφ=1   β. εφφ=$3/(2\sqrt{7})$ γ. εφφ=2/3

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Α) Ασκήσεις και προβλήματα

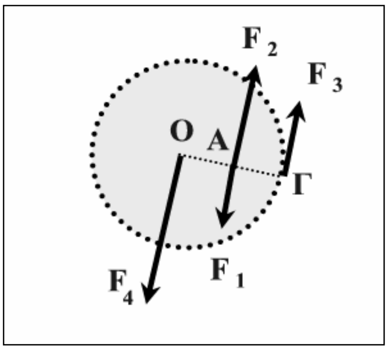
Α2.1 Στην αβαρή ράβδο του σχήματος δίνονται τα μέτρα των δυνάμεων F_1=10N, F_2=20N, F_3= 40N, F_4=8N, η γωνία φ=30^0 και οι αποστάσεις (ΟΑ)=(ΟΔ)=(ΔΓ)=0,2m.



Να υπολογιστούν:
α. Οι αλγεβρικές τιμές των ροπών των δυνάμεων, ως προς το σημείο Ο.
β. Η αλγεβρική τιμή της συνολικής ροπής ως προς το σημείο Α.
γ. Η αλγεβρική τιμή της συνολικής ροπής ως προς το σημείο Γ.
Θεωρήστε ως θετική τη φορά περιστροφής που είναι αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

α. 0, 4Nm, –16Nm, 0,8Nm, β. –20,4Nm, γ. 7,2Nm

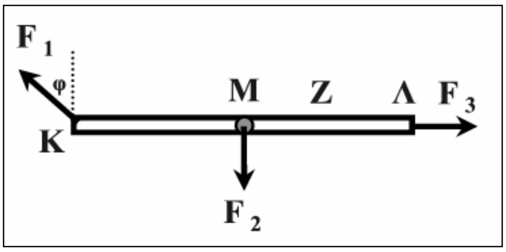
Α2.2 Στο τροχό ακτίνας ΟΓ=R=2m ασκούνται 4 δυνάμεις με μέτρα F_1=10N, F_2=20N, F_3=10N και F_4=30N. Όλες οι δυνάμεις βρίσκονται πάνω στο επίπεδο του τροχού και η διεύθυνσή τους είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΓ. Να υπολογιστεί η αλγεβρική τιμή της συνολικής ροπής που ασκείται στον τροχό ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τροχού και διέρχεται:



α. Από το κέντρο αυτού Ο.
β. Από το σημείο Γ.
Δίνεται ότι (ΟΑ)=1m.

α. Στ= 30Nm, β. Στ= 50Nm

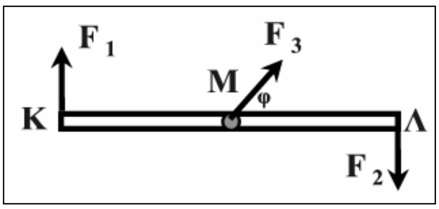
Α2.3 Η αβαρής ράβδος ΚΛ του σχήματος δέχεται τρεις δυνάμεις με ίσα μέτρα 10N. Η ράβδος έχει μήκος λ=2m, οι αποστάσεις είναι ΚΜ=λ/2 και ΚΖ=1,4m και η φ=60^0. Να υπολογιστούν:



α. Η συνισταμένη ροπή ως προς το Κ.
β. Η συνισταμένη ροπή ως προς το Λ.
γ. Η συνισταμένη ροπή ως προς το Μ.
δ. Η συνισταμένη ροπή ως προς το Ζ.
ε. Το μέτρο και την κατεύθυνση μιας κατακόρυφης δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε στο μέσο Μ της ράβδου ώστε η συνισταμένη ροπή ως προς το Ζ να είναι +15Nm.

α. –10Nm, β. 0, γ. –5Nm, δ. –3Nm, ε. F=45N με φορά προς τα κάτω

Α2.4 Η αβαρής ράβδος ΚΛ έχει μήκος 2m και οι δύο δυνάμεις F_1, F_2 αποτελούν ζεύγος με ροπή 100Nm. Το μέτρο της F_3 είναι 200N. Να βρεθούν:



α. Τα μέτρα των F_1, F_2.
β. Η γωνία φ ώστε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών και

των τριών δυνάμεων ως προς το Κ να είναι μηδέν.

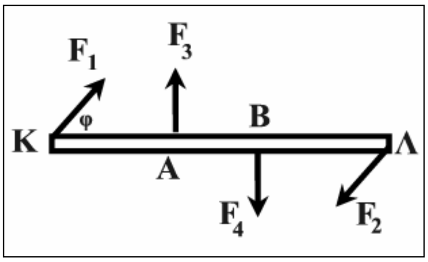
Α. $F_1=F_2=50Nm$, β. $\varphi=30^0$

Α2.5 Η αβαρής ράβδος ΚΛ του σχήματος δέχεται τη δράση δύο ζευγών δυνάμεων με μέτρα $F_1=F_2=10\sqrt{3}N$ και $F_3=F_4=10N$. Η ροπή του ζεύγους των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ έχει μέτρο 30Nm, τα σημεία Α και Β απέχουν ΑΒ=λ/4 και $\varphi=60^0$. Να βρεθούν:

α. Το μήκος λ της ράβδου.

β. Η ροπή του ζεύγους των $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$.

γ. Τη συνισταμένη των ροπών και των τεσσάρων δυνάμεων ως προς το σημείο Κ και ως προς το σημείο Λ.



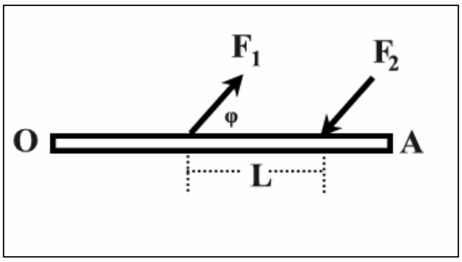
α. λ=2m. β. 5Nm. γ. –35Nm

Α2.6 Στη ράβδο ΟΑ του σχήματος ασκούνται οι δύο παράλληλες δυνάμεις $F_1=F_2=20N$ σε σημεία που απέχουν απόσταση L=2m. Δίνεται ακόμα η γωνία $\varphi=30^0$. Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή των F_1, F_2.

α. Ως προς το σημείο Ο.

β. Ως προς το σημείο Α.

Τι συμπέρασμα βγάζετε από τους υπολογισμούς;



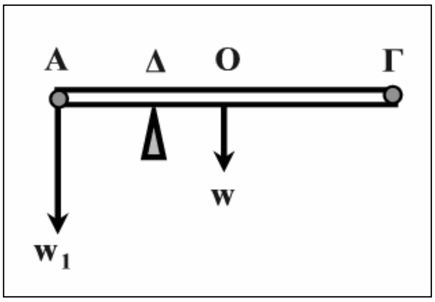
α. τ=–20Nm, β. τ=–20Nm

Α2.7 Ομογενής ράβδος έχει μήκος 4m, βάρος w=200N και στηρίζεται σε σημείο Δ το οποίο απέχει από το κέντρο Ο αυτής απόσταση ΟΔ=1m.

α. Αν στο άκρο Α φέρει βάρος $w_1=500N$, πόσο βάρος w_2 πρέπει να φέρει στο άλλο άκρο Γ ώστε να ισορροπεί;

β. Αν η ράβδος ισορροπεί πόση δύναμη ασκείται στο σημείο στήριξης Δ;

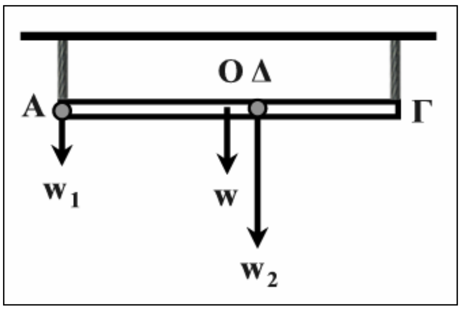
α. $w_2=100N$, β. F=800N



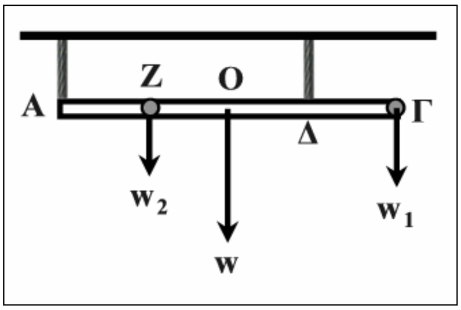
Α2.8 Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους λ=2m έχει βάρος w=200N και φέρει φορτία $w_1=100N$ στο άκρο Α και $w_2=400N$ στο σημείο Δ στο οποίο (ΟΔ)=0,3m.

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις F_1, F_2 που ασκούν τα δύο κατακόρυφα σχοινιά στα άκρα της ράβδου, ώστε αυτή να ισορροπεί.

$F_1=340N$, $F_2=360N$



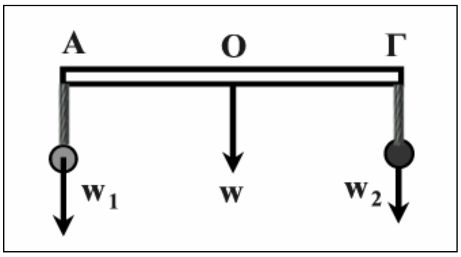
Α2.9 Ομογενής ράβδος βάρους w=100N φέρει φορτία με βάρη $w_1=50N$ και $w_2=50N$ στα σημεία που φαίνονται στο σχήμα. Η ράβδος για να ισορροπεί οριζόντια κρέμεται από οροφή με δύο νήματα που είναι δεμένα στα σημεία Α και Δ και σε ακλόνητη οροφή. Αν δίνονται ότι (ΑΖ)=(ΖΟ)=(ΟΔ)=(ΔΓ)=0,2m να βρεθούν τα μέτρα των



δυνάμεων F_1, F_2 που πρέπει να ασκούν τα νήματα στη ράβδο ώστε αυτή να ισορροπεί.

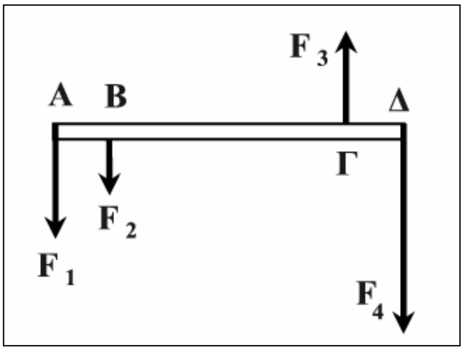
F_1=50N, F_2=150N

A2.10 Από τα δύο άκρα Α και Γ μιας ομογενούς ράβδου ΑΓ, βάρους w=200N κρέμονται δύο σώματα με βάρη w_1=100N, w_2=300N αντιστοίχως. Αν το μήκος της ράβδου είναι 4m, να υπολογιστεί η απόσταση από το άκρο Γ ενός σημείου Δ στο οποίο, αν στηριχτεί η ράβδος, θα ισορροπεί.



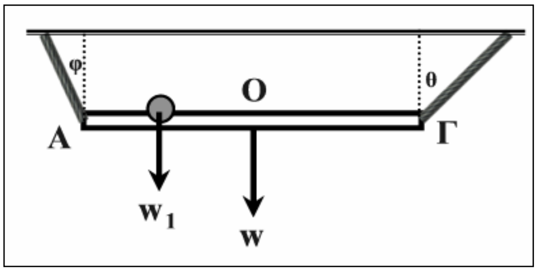
ΓΔ=4/3m

A2.11 Στην αβαρή ράβδο του σχήματος δίνονται οι δυνάμεις F_1=90N, F_2=40N, F_3=100N, F_4=200N και οι αποστάσεις ΑΒ=20cm, ΒΓ=40cm, ΓΔ=20cm.
Να βρεθεί η θέση του σημείου εφαρμογής, Ζ, η κατεύθυνση και το μέτρο μιας κατακόρυφης δύναμης F που πρέπει να ασκείται στη ράβδο ώστε αυτή να ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Η F βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με τις άλλες δυνάμεις.



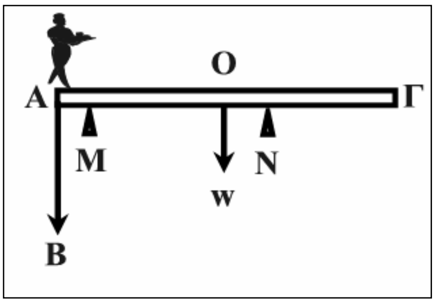
x=AZ=46,96cm, F=230N

A2.12 Ομογενής ράβδος ΑΓ, μήκους λ και βάρους w=90N κρέμεται από δύο σχοινιά που είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία της οροφής, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Από σημείο Ζ που απέχει από το άκρο Α απόσταση λ/4 κρέμεται σώμα βάρους w_1=60N. Όταν η ράβδος ισορροπεί οριζόντια το αριστερό σχοινί σχηματίζει γωνία $φ=30^0$ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το Α. Να υπολογιστεί η γωνία θ που σχηματίζει το δεξιό σχοινί με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο Γ.



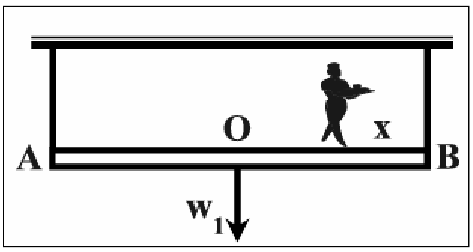
$εφθ=\sqrt{3}/2$

□**A2.13** Ομογενής σανίδα ΑΓ, μήκους λ=4m και βάρους w=300N στηρίζεται σε δύο σημεία Μ και Ν που απέχουν από το ένα άκρο Α αποστάσεις ΑΜ=0,5m και ΑΝ=2,5m αντιστοίχως.
α. Αν ένας εργάτης βάρους Β=600Ν στέκεται στο ένα άκρο Α και η ράβδος ισορροπεί, να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα Μ και Ν στη σανίδα.
β. Αν ο εργάτης αρχίσει να περπατάει προς το άκρο Γ σε πόση απόσταση, x, πριν το Γ πρέπει να σταματήσει ώστε η ράβδος να μην ανατραπεί;



α. 825N και 75N, β. x=1,25m

□**A2.14** Ομογενής δοκός μήκους λ=4m και βάρους w_1=100N ισορροπεί οριζόντια δεμένη από την οροφή

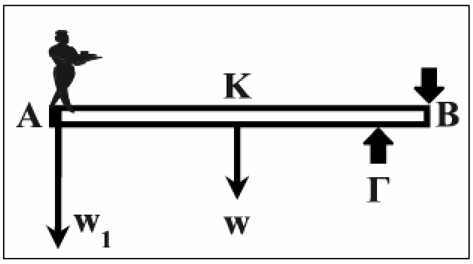


με δύο σχοινιά όπως στο σχήμα. Τα σχοινιά έχουν όριο θραύσης T_{max}=650N.
α. Σε πόση απόσταση από το άκρο Β μπορεί να μετακινηθεί άνθρωπος βάρους w_2=800N ώστε να μη σπάσει κάποιο από τα σχοινιά;
β. Αν ο άνθρωπος στέκεται σε απόσταση 1m από το Β ποιος είναι ο λόγος των τάσεων των δύο σχοινιών;

α. x=1m, β. T_1/T_2=5/13

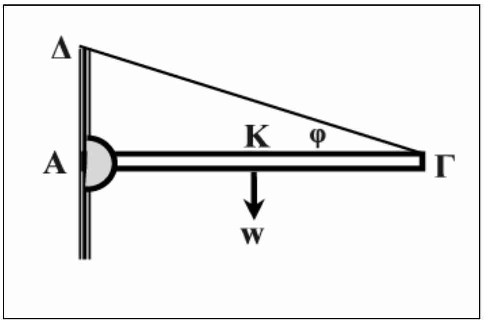
□**Α2.15** Η ομογενής δοκός, ΑΒ, μήκους λ=6m, βάρους w=200N ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε δύο σημεία Γ και Β που απέχουν μεταξύ τους ΓΒ=0,5m. Αν στο άκρο της Α στέκεται κάποιος άντρας βάρους w_1=400N, να υπολογιστούν οι κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούν τα δύο στηρίγματα στη δοκό.

F_1=6000N, F_2=5400N

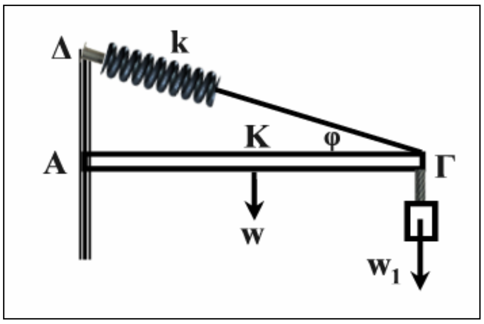


□**Α2.16** Ομογενής δοκός ΑΓ, βάρους w=60N ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα, με τη βοήθεια σχοινιού ΓΔ το οποίο σχηματίζει γωνία φ=30^0 με αυτήν. Από το άλλο άκρο Α στηρίζεται σε άρθρωση που είναι συνδεδεμένη στον κατακόρυφο τοίχο. Να υπολογιστούν:
α. Η τάση, Τ, του σχοινιού.
β. Η δύναμη, F, που ασκεί η άρθρωση στη δοκό στο σημείο επαφής, Α.

α. Τ=60N, β. F=60N, θ=30^0

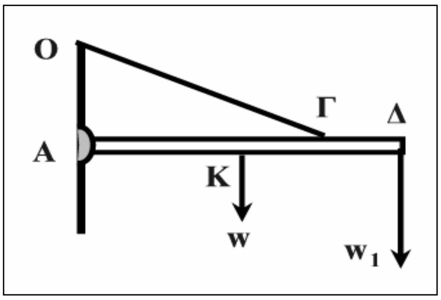


□**Α2.17** Ομογενής δοκός ΑΓ, βάρους w=40N ισορροπεί με τη βοήθεια αβαρούς ελατηρίου σταθεράς, k=10^3 N/m και νήματος το οποίο σχηματίζει με αυτήν γωνία φ=30^0. Το άλλο άκρο Α στηρίζεται σε προεξοχή του τοίχου. Αν στο άκρο Γ κρέμεται σώμα βάρους w_1=160N να υπολογιστούν:
α. Η επιμήκυνση, Δx, του ελατηρίου.
β. Η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη δοκό στο σημείο επαφής, Α.



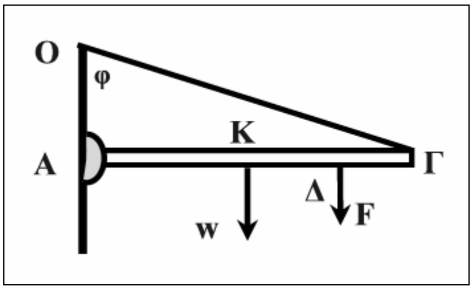
α. Δx=0,36m, β. F=312,4N, εφθ=0,0642, θ η γωνία που σχηματίζει η F με τη δοκό.

□**Α2.18** Ομογενής δοκός ΑΔ=λ, βάρους w=30N στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση Α και διατηρείται οριζόντια με σχοινί ΟΓ μήκους (ΟΓ)=2(ΟΑ) το οποίο στηρίζεται σε σημείο Ο του τοίχου. Το σημείο Γ στο οποίο δένεται στη δοκό απέχει από το σημείο Α απόσταση (ΑΓ)=3λ/4, ενώ στο άκρο Δ κρέμεται σώμα βάρους w_1=60N.
Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται από το σχοινί, F_1 και από την άρθρωση, F_2.



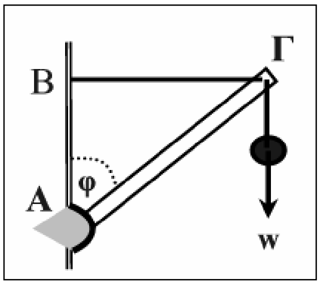
F_1=200N, F_2=173,5 N, εφφ=0,0578

□**Α2.19** Ομογενής ράβδος ΑΓ, βάρους w=100N, μήκους λ=4m στηρίζεται με τη βοήθεια άρθρωσης Α και σχοινιού ΟΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται ότι $\varphi=60^0$ και ότι το όριο θραύσης του σχοινιού είναι 200N. Να βρεθεί η μέγιστη απόσταση x από το άκρο Α στο οποίο πρέπει να ασκήσουμε μια κατακόρυφη δύναμη F=80N, ώστε να μη σπάσει το σχοινί.



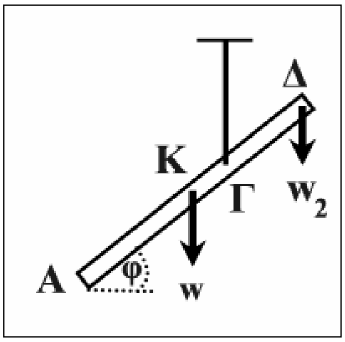
x=2,5m

□**Α2.20** Η ομογενής ράβδος ΑΓ έχει βάρος w_1=40N και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ένα άκρο Γ φέρει βάρος w=40N και στηρίζεται με τη βοήθεια νήματος, ενώ το άλλο άκρο Γ συνδέεται με τον τοίχο μέσω άρθρωσης. Δίνεται ΑΒ=ΒΓ. Να βρεθούν:
α. Η τάση του νήματος, Τ.
β. Η δύναμη που ασκεί η άρθρωση.



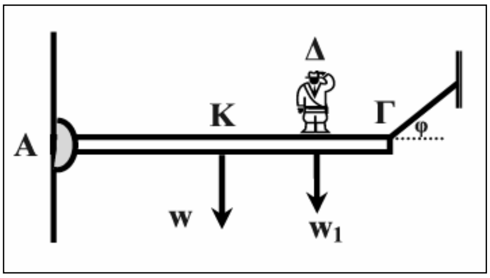
α. Τ=60Ν, β.F=100N, εφθ=4/3

□**Α2.21** Η ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους λ=6m και βάρους w=100N ισορροπεί σε πλάγια θέση που σχηματίζει γωνία $\varphi=60^0$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος φέρει στο άκρο Δ, φορτίο w_2= 50N και στο άλλο άκρο Α, φορτίο w_1 και ισορροπεί κρεμασμένη από το σημείο Γ που βρίσκεται δεξιά από το κέντρο της Κ κατά ΚΓ=1m.
α. Να βρεθεί η τάση του νήματος από το οποίο κρέμεται η ράβδος.
β. Να βρεθεί το φορτίο, βάρους w_1.



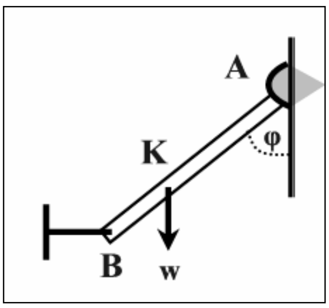
α. Τ=150Ν, β. w_1=0

□**Α2.22** Η ομογενής δοκός ΑΓ μήκους λ=4m και βάρους w=100N στηρίζεται στο ένα άκρο της, Α, σε κατακόρυφο τοίχο μέσω μιας άρθρωσης, ενώ το άλλο άκρο, Γ, είναι δεμένο με νήμα τάσης Τ=400Ν. Παιδί βάρους w_1=300N στέκεται στη δοκό σε απόσταση x=ΑΔ από την άρθρωση, ενώ η γωνία φ είναι 30^0.
α. Πόση είναι η δύναμη, F, που ασκεί η άρθρωση στη δοκό;
β. Πόση είναι η απόσταση ΑΔ=x;



α. F=400N, $\theta=30^0$, β. x=2m

□**Α2.23** Η μεταλλική δοκός ΑΒ, μήκους λ δεν είναι ομογενής και έτσι το βάρος της w=30N ασκείται στο σημείο Κ το οποίο απέχει απόσταση λ/3 από το άκρο της Β. Η ράβδος στο άκρο της Α αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ με το άλλο άκρο της Β συνδέεται μέσω τεντωμένου νήματος σε άλλο σταθερό σημείο. Δίνεται $\varphi=45^0$. Να υπολογιστούν:
α. Η τάση του νήματος, Τ.
β. Το μέτρο της δύναμης F που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

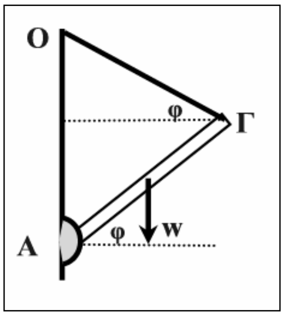


α.T=20N, β. F=36N

□**Α2.24** Το πάνω άκρο Γ της ομογενούς ράβδου ΑΓ δένεται από κατακόρυφο τοίχο με σχοινί ΟΓ και το κάτω άκρο Α στηρίζεται σε άρθρωση πάνω στον ίδιο τοίχο. Αν το βάρος της ράβδου είναι w=20N και οι γωνίες $\varphi=30^0$ να υπολογιστούν :

α. Το μέτρο της τάσης, Τ, του σχοινιού.

β. Το μέτρο της δύναμης, F, που ασκεί η άρθρωση πάνω στη ράβδο.

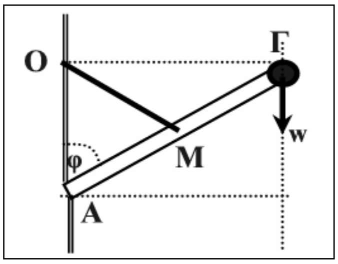


α. T= 10N, β. F=17,3 N

□**Α2.25** Ομογενής αβαρής δοκός ΑΓ, μήκους λ=4m στηρίζεται με το άκρο Α σε εγκοπή κατακόρυφου τοίχου και είναι κρεμασμένη από το μέσον της Μ με σχοινί ΟΜ το οποίο είναι δεμένο σταθερά σε σημείο Ο του ίδιου τοίχου, έτσι ώστε η γωνία ΟΑΜ να ισούται με $\varphi=60^0$. Στο άκρο Γ είναι προσαρμοσμένο σώμα βάρους w=50N, έτσι ώστε Γ και Ο να βρίσκονται στο ίδιο ύψος.

α. Πόσο είναι το μήκος του σχοινιού, ΟΜ.

β. Πόση είναι η τάση του σχοινιού και η αντίδραση του τοίχου;



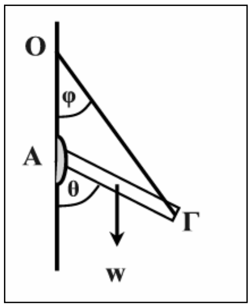
α. 2m, β. 100N, $50\sqrt{3}$N

□**Α2.26** Ομογενής δοκός βάρους w=60N στηρίζεται με άρθρωση Α σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ στο άλλο άκρο της Γ είναι δεμένη με σχοινί ΟΓ, το άκρο Ο του οποίου είναι στερεωμένο στον ίδιο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος ισορροπεί έτσι ώστε οι γωνίες που σχηματίζονται να είναι $\varphi=30^0$ και $\theta=60^0$. Να υπολογιστούν:

α. Η δύναμη F_1 που ασκείται από την άρθρωση στη δοκό.

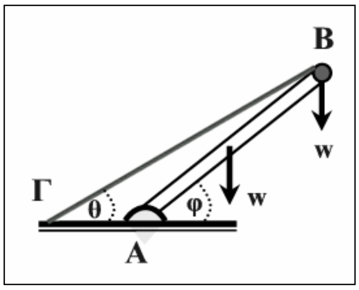
β. Η δύναμη F_2 που τεντώνει το σχοινί.

γ. Να αποδειχθεί ότι και οι τρεις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο διέρχονται από το ίδιο σημείο.



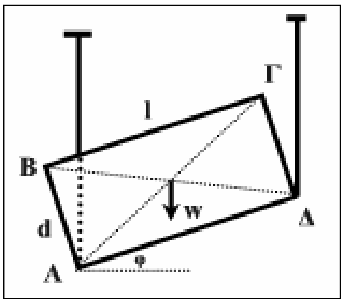
α. F_1=30 N, $\omega=60^0$ ως προς τον τοίχο, β. $F_2=30\sqrt{3}$N

□**Α2.27** Η ομογενής ράβδος μήκους λ και βάρους w=100N ισορροπεί με τη βοήθεια μιας άρθρωσης στο άκρο Α και ενός συρματόσχοινου ΒΓ που είναι δεμένο στο οριζόντιο έδαφος. Στο άκρο Β η ράβδος φέρει φορτίο βάρους επίσης w. Η ράβδος ισορροπεί έτσι ώστε οι γωνίες που σχηματίζονται να είναι,$\varphi=45^0$ και $\theta=30^0$, αντιστοίχως. Να υπολογιστεί η τάση, Τ, του συρματόσχοινου, ΒΓ. Δίνονται $\sqrt{2}$=1,41, $\sqrt{6}$=2,45



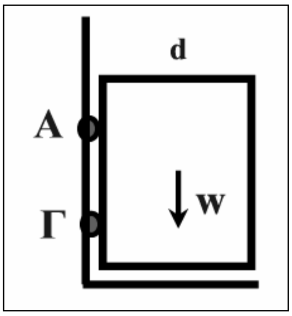
T=407N

□**Α2.28** Το κιβώτιο που φαίνεται στο σχήμα έχει μήκος λ=3m, ύψος $d=\sqrt{3}$m και βάρος w. Το κιβώτιο κρέμεται με τη βοήθεια δύο καλωδίων από τα σημεία Α και Δ που του ασκούν κατακόρυφες δυνάμεις F_1, F_2. Να υπολογιστούν οι δύο δυνάμεις F_1, F_2 σε συνάρτηση με το βάρος w, αν η ακμή του μήκους του κιβωτίου σχηματίζει γωνία $\varphi=30^0$ με το οριζόντιο επίπεδο.



F_1=2w/3, F_2=w/3

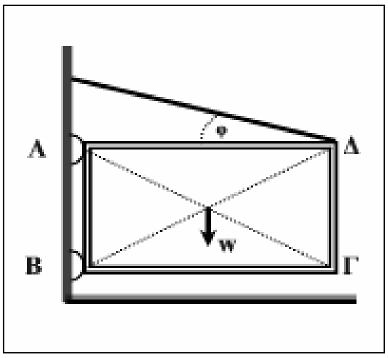
□**Α2.29** Ομογενής πόρτα πλάτους d=0,8m και βάρους w=60N στηρίζεται σε δύο μεντεσέδες οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους απόσταση ΑΓ=1,2m. Οι μεντεσέδες απέχουν ίσες αποστάσεις από την πάνω και την κάτω πλευρά της πόρτας και ο καθένας τους κρατάει το μισό βάρος της πόρτας. Να υπολογιστούν:



α. Οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούν οι μεντεσέδες στην πόρτα.
β. Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν οι δύο μεντεσέδες στην πόρτα.

α. $F_{Γχ}$=20N, $F_{Αχ}$=–20N, β. F_1=F_2=36,06N

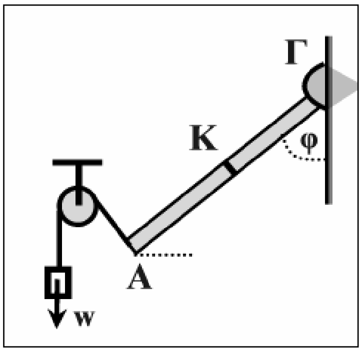
□**2.30** Η ομογενής πόρτα του σχήματος έχει διαστάσεις ΑΒ=2m, ΑΔ=$2\sqrt{3}$m και βάρος w=400N. Η πόρτα ισορροπεί με τη βοήθεια δύο μεντεσέδων στα σημεία Α και Β και ενός καλωδίου που είναι δεμένο στο σημείο, Δ και σχηματίζει γωνία φ=30^0 με την πλευρά ΑΔ της πόρτας. Η δύναμη F_1 που ασκεί η άρθρωση Α είναι κατακόρυφη, ενώ η δύναμη F_2 που ασκεί η άρθρωση, Β, είναι οριζόντια. Να υπολογιστούν:



α. Η τάση, Τ, του καλωδίου.
β. Οι δυνάμεις των αρθρώσεων F_1, F_2.

α.Τ=200N, β. F_1=300N, F_2=$100\sqrt{3}$N

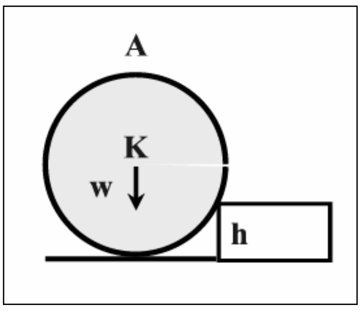
□**Α2.31** Η ράβδος ΑΓ που φαίνεται στο σχήμα αποτελείται από δύο ομογενή και ίδιων διαστάσεων τμήματα, τα οποία αποτελούνται από διαφορετικά υλικά. Το τμήμα ΑΚ έχει πυκνότητα d_1=d ενώ το άλλο τμήμα, ΚΓ, πυκνότητα d_2=2d. Το συνολικό βάρος της είναι 300N και το μήκος της λ=4m. Η ράβδος ισορροπεί ενώ σχηματίζει γωνιά φ=30^0 με τον ορίζοντα. Η ισορροπία της επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μιας άρθρωσης στο άκρο Γ και ενός νήματος στο άκρο, Α, το οποίο συνδέεται με φορτίο, βάρους w, μέσω της σταθερής και ακίνητης τροχαλίας. Το νήμα αυτό έχει κατεύθυνση κάθετη στο μήκος της ράβδου. Να υπολογιστούν:



α. Το βάρος, w.
β. Το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης, F, που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

α. w=62,5N, β. F_x=$31,25\sqrt{3}$N

□**Α2.32** Κυλινδρικό ομογενές βαρέλι διαμέτρου βάσης 1,2m και βάρους w=800N βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και στηρίζεται σ' αυτό με την κυλινδρική του επιφάνεια. Να υπολογιστεί η ελάχιστη οριζόντια δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο βαρέλι ώστε αυτό να ανέβει ένα σκαλοπάτι ύψους h=0,12m,αν το σημείο εφαρμογής της δύναμης είναι:



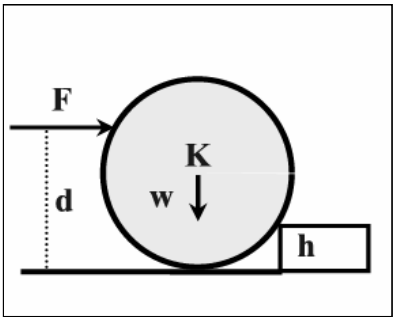
α. Στο κέντρο Κ.
β. Στο ανώτατο σημείο Α.

α. $F_K = 600N$, β. $F_A = 266,7N$

□**Α2.33** Η ομογενής σφαίρα βάρους w=100N ακτίνας R=0,25m πρόκειται να ανέβει σκαλοπάτι ύψους h=0,1m με τη βοήθεια οριζόντιας δύναμης F που της ασκείται σε σημείο Α που απέχει απόσταση d=0,35m από το οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα δεν ολισθαίνει στο σκαλοπάτι.

α. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της δύναμης F ώστε η σφαίρα να χάσει την επαφή της με το δάπεδο;

β. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από το σκαλοπάτι, όταν η F έχει την ελάχιστη τιμή του ερωτήματος α;



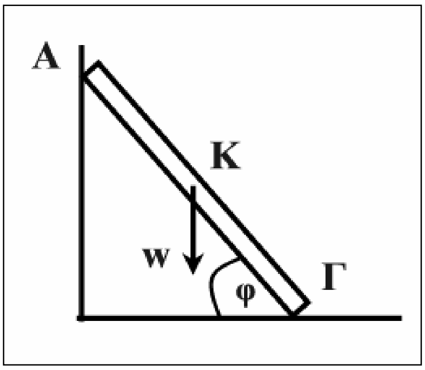
α. $F = 80N$, β. $F' = 128,06N$

□**Α2.34** Μια ομογενής δοκός μήκους λ και βάρους w=60N ισορροπεί μεταξύ ενός λείου κατακόρυφου τοίχου και του πατώματος. Η γωνία μεταξύ της δοκού και του πατώματος είναι $\varphi = 60^0$.

α. Πόση είναι η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη δοκό;

β. Πόση είναι η οριζόντια και η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το έδαφος στη δοκό;

γ. Για ποιες τιμές του συντελεστή μέγιστης στατικής τριβής μεταξύ της δοκού και του πατώματος, μπορεί η δοκός να ισορροπεί σ΄ αυτήν τη θέση;

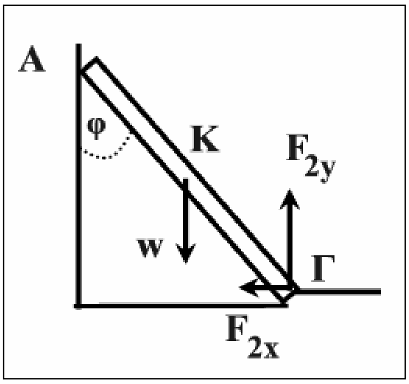


α. $F_1 = 10\sqrt{3}N$, β. $F_{2x} = 10\sqrt{3}N$, $F_{2y} = 60N$, γ. $\mu_\varsigma > \sqrt{3}/6$

□**Α2.35** Μια ομοιόμορφη σανίδα μήκους λ και βάρους w=100N στηρίζεται με το ένα άκρο της σε κατακόρυφο τοίχο μετά του οποίου σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^0$ και με το άλλο άκρο της σε προεξοχή του εδάφους. Η κάθετη με την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης F_2 που ασκεί το έδαφος στη σανίδα έχουν την αλγεβρική σχέση, $F_{2x} = \sqrt{3}F_{2y}/4$.

Να υπολογιστούν η συνιστώσα F_{2y} και η οριζόντια και κάθετη συνιστώσα της δύναμης F_1 που ασκεί ο τοίχος στη σανίδα.

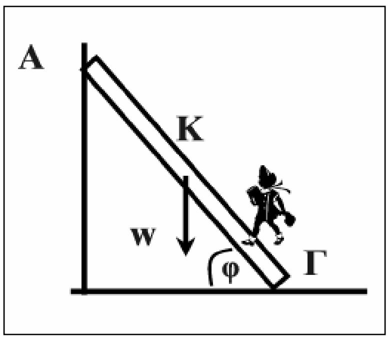
$F_{2y} = 200N$, $F_{1\chi} = 50\sqrt{3}N$, $F_{1y} = -100N$



□**Α2.36** Μια ομοιόμορφη σκάλα, μήκους λ=4m, βάρους w=60N στηρίζεται με το ένα άκρο της Α σε τελείως λείο κατακόρυφο τοίχο και με το άλλο της, Γ σε οριζόντιο τραχύ δάπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σκάλας και οριζοντίου δαπέδου είναι $\mu_\varsigma = \sqrt{3}/6$ και η σκάλα ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\varphi = 60^0$ με το δάπεδο. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο κατακόρυφος τοίχος στη σκάλα.

β. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σκάλα από το δάπεδο.

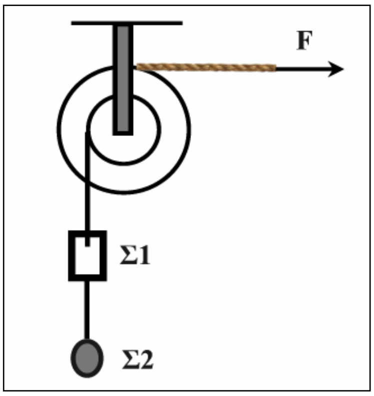


γ. Αν ένα μικρό παιδί, βάρους w_1=400N αρχίσει να ανεβαίνει τη σκάλα σε πόση απόσταση από το άκρο Γ μπορεί να φτάσει χωρίς η σκάλα να αρχίσει να γλιστρά;

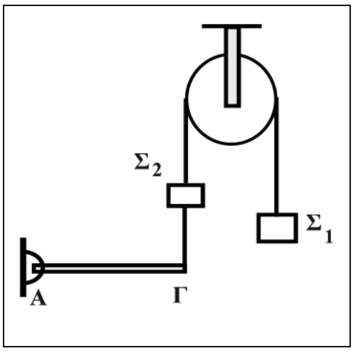
α. $F_1=10\sqrt{3}N$, β. F_2=62,5N, γ. x<2m

2.37 Στην τροχαλία του σχήματος δίνονται η μάζα της τροχαλίας M=0,5kg, η μάζα του σώματος $Σ_1$, m_1=2kg, του $Σ_2$ είμαι m_2=1kg, η μικρή ακτίνα r=0,2m και η μεγάλη ακτίνα της τροχαλίας R=0,4m. Το σύστημα ισορροπεί. Να υπολογιστούν:
α. Η δύναμη F που ασκείται στο νήμα που είναι τυλιγμένο στο εξωτερικό αυλάκι και οι τάσεις των αβαρών νημάτων.
β. Η δύναμη που ασκεί ο άξονας της τροχαλίας σε αυτή. Δίνεται g=10m/s^2.

α. F=15N, T_1=30N, T_2=10N, β. $\sqrt{1450}$N

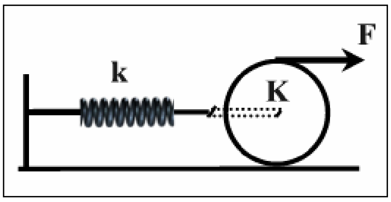


2.38 Το σύστημα του σχήματος ισορροπεί. Η ράβδος ΑΓ είναι οριζόντια και συνδέεται με τον κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση. Οι μάζες των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι m_1 και m_2=1kg, της τροχαλίας M_1=2kg και της ράβδου ΑΓ, M_2=2kg. Το μήκος της ράβδου είναι L=0,3m και η ακτίνα της τροχαλίας R=0,2m. Δίνεται g=10m/s^2. Να υπολογίσετε
α. τις τάσεις και των τριών αβαρών νημάτων.
β. τη μάζα m_1.
γ. Τη δύναμη που ασκεί ο άξονας στην τροχαλία και τη δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο στο σημείο Α.



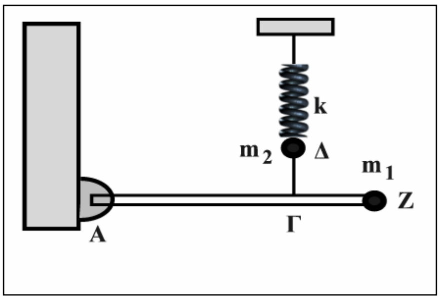
α.10N, 20N, 20N, β. m_1=2kg, γ.60N, 10N

2.39 Στο διπλανό σχήμα ασκούμε δύναμη F=40N και όλο το σύστημα ισορροπεί. Η μάζα του τροχού είναι m=10kg και η σταθερά του ελατηρίου k=400N. Να υπολογιστούν:
α. Η δύναμη της στατικής τριβής που ασκείται από το πάτωμα στον τροχό ώστε αυτός να μην περιστρέφεται.
β. Η επιμήκυνση του ελατηρίου.



α. T=F=40N, β. x=0,2m

2.40 Ομογενής άκαμπτη ράβδος μήκος L=4m και μάζας M=3kg ισορροπεί σε οριζόντια θέση όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο άκρο της Α υπάρχει ακλόνητη άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Στο άλλο άκρο της Ζ υπάρχει σφαιρίδιο μάζας m_1=0,6kg αμελητέων διαστάσεων. Ένα αβαρές και τεντωμένο νήμα ΔΓ συνδέει το σημείο Γ της ράβδου με σφαιρίδιο μάζας m_2=1kg το οποίο είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο. Η απόσταση ΑΓ είναι 2,8m. Όλη η διάταξη βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Δίνεται g=10m/s^2. Να υπολογιστούν:



α. η τάση του νήματος, και η δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο στο σημείο Α.
β. η επιμήκυνση του ελατηρίου.

α. T=30N, F=6N, β. x=0,4m

3. Η ροπή αδράνειας

(Ε) Ερωτήσεις

Ε3.1 Να συμπληρωθούν τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:
α. Η ροπή αδράνειας υλικού σημείου μάζας, m, ως προς άξονα που απέχει απόσταση, r, από το σημείο αυτό ισούται με το γινόμενο, I=…..
β. Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα, το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών ……….. από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα ……………..των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής.
γ. Μονάδα μέτρησης της ροπής αδράνειας στο S.I. είναι το 1……..
δ. Αν I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας Μ, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε, η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το ……………. της ροπής αδράνειας I_{cm} και του γινομένου της …………..του σώματος επί το τετράγωνο της ……………..

Ε3.2 Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος αποτελεί:
α. Μέτρο αδράνειας του σώματος στη μεταβολή της κίνησης του κέντρου μάζας του.
β. Σταθερά αναλογίας μεταξύ της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα και της μάζας.
γ. Μέτρο αδράνειας του σώματος στη μεταβολή της περιστροφικής του κίνησης.
δ. Τίποτα από τα παραπάνω.

Ε3.3 Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από:
α. Τη θέση του άξονα περιστροφής.
β. Τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.
γ. Το σχήμα και τις διαστάσεις του σώματος.
δ. Τη μάζα του σώματος.
ε. Την κατανομή μάζας του σώματος.
στ. Τη ροπή που ασκείται στο σώμα.
Ποιες από τις προτάσεις αυτές είναι σωστές και ποιες λάθος;

Ε3.4 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν και αναφέρονται στη ροπή αδράνειας είναι σωστές ή λανθασμένες; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
α. Η ροπή αδράνειας είναι μέγεθος που εξαρτάται μόνο από τη μάζα του σώματος.
β. Ένα στερεό σώμα έχει άπειρες τιμές ροπής αδράνειας.
γ. Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος είναι μικρότερη από τη ροπή αδράνειας ως προς οποιοδήποτε άλλο παράλληλο προς αυτόν άξονα περιστροφής.
δ. Ροπή αδράνειας έχει ένα σώμα μόνο όταν περιστρέφεται.
ε. Μονάδα μέτρησης της ροπής αδράνειας στο S.I. είναι το $1kgm^2$.

Ε3.5 Η ροπή αδράνειας οποιουδήποτε στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι:
α. Ίση με το μηδέν, αν το σώμα δεν περιστρέφεται.
β. Ίση με το μηδέν, αν το σώμα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.
γ. Ίση με το μηδέν, αν ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας του.
δ. Τίποτα από τα παραπάνω.
Ε3.6 Η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς δίσκου ο οποίος περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι:

α. Ίδια, ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής.
β. Ίδια ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.
γ. Μέγιστη ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στον δίσκο.
δ. Ανεξάρτητη από το πάχος του δίσκου.

Ε3.7 Υλικό σημείο μάζας m απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής του και έχει ροπή αδράνειας ως προς αυτόν ίση με Ι. Αν υποδιπλασιάσουμε την απόσταση, η ροπή αδράνειας, ως προς τον ίδιο άξονα, θα γίνει:

α. Ι/4 β. 2Ι γ. 4Ι δ. Ι/2

Ε3.8 Υλικό σημείο μάζας m που απέχει από άξονα περιστροφής απόσταση λ_1 έχει ροπή αδράνειας I_1. Άλλο υλικό σημείο μάζας 8m έχει ως προς τον ίδιο άξονα ροπή αδράνειας $I_2=2I_1$, θα απέχει από αυτόν απόσταση, λ_2, ίση με:

α. $\lambda_2=2\lambda_1$ β. $\lambda_2=\lambda_1/2$ γ. $\lambda_2=4\lambda_1$ δ. $\lambda_2=\lambda_1/4$

Ε3.9 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές και ποιες λανθασμένες. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
α. Δύο ομογενείς συμπαγείς κύλινδροι, ίδιας μάζας έχουν την ίδια ροπή αδράνειας ως προς τον κύριο άξονα συμμετρίας τους.
β. Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της είναι μεγαλύτερη της ροπής αδράνειας της ίδιας ράβδου ως προς παράλληλο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της.
γ. Η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της εξαρτάται μόνο από τη μάζα και την ακτίνα της.
δ. Οι ροπές αδράνειας δύο κυλίνδρων, ίδιας ακτίνας και ίδιας μάζας με διαφορετικά μήκη, που αποτελούνται από το ίδιο ομογενές υλικό, ως προς τους κύριους άξονες συμμετρίας τους, είναι μεταξύ τους ίσες.

Ε3.10 Η ομογενής συμπαγής σφαίρα έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I=2mR^2/5$. Δύο τέτοιες σφαίρες, ίδιας ακτίνας, αποτελούνται από διαφορετικά υλικά που έχουν πυκνότητες, d_1, d_2 με $d_2=2d_1$. Ο λόγος των ροπών αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους είναι:

α. $I_1/I_2=1/2$ β. $I_1/I_2=1$ γ. $I_1/I_2=2$

Ποια είναι η σωστή απάντηση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.11 Η ροπή αδράνειας ενός μαθητή ως προς τον κύριο κατακόρυφο άξονα του σώματός του είναι:
α. Μεγαλύτερη, αν ο μαθητής έχει τα χέρια του σε έκταση παρά σε ανάταση.
β. Μικρότερη, αν ο μαθητής έχει τα χέρια του σε έκταση παρά σε ανάταση.
γ. Τίποτα από τα παραπάνω.

Ποια είναι η σωστή απάντηση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.12 Αθλητής είναι όρθιος και κρατάει σε κάθε χέρι του από ένα ίδιο αλτήρα. Ο κάθε αλτήρας θεωρείται ως υλικό σημείο. Η ροπή αδράνειας ως προς τον κύριο κατακόρυφο άξονα του σώματός του είναι μεγαλύτερη, αν έχει τα χέρια του:

α. Σε πρόταση. β. Σε έκταση. γ. Είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.13 Δύο ομογενείς κυκλικοί δίσκοι, ίδιας μάζας και ίδιου πάχους αποτελούνται από μέταλλα διαφορετικών πυκνοτήτων. Ο δίσκος με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν, είναι αυτός με:
α. Τη μεγαλύτερη πυκνότητα.
β. Τη μικρότερη πυκνότητα.
γ. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε.
δ. Η ροπή αδράνειας είναι ανεξάρτητη από την πυκνότητα του υλικού.
Δίνεται ότι ο κυκλικός δίσκος μάζας, m, και ακτίνας, R, έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν, $I=mR^2/2$.

Ε3.14 Δύο σημειακές μάζες m, απέχουν απόσταση L, συνδέονται με αβαρή ράβδο και ο άξονας περιστροφής τους διέρχεται από το μέσον της ράβδου και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα αυτόν είναι ίση με I. Αν πλησιάσουμε τις δύο μάζες κατά την ίδια απόσταση, ως προς τον άξονα περιστροφής, ώστε η μεταξύ τους απόσταση να γίνει L/2, τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον ίδιο άξονα, θα είναι:

α. 4I β. I/2 γ. I/8 δ. I/4

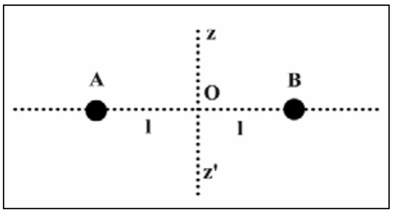
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.15 Μια ομογενής λεπτή ράβδος μήκους L και μάζας m έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σ΄ αυτήν, $I_o=mL^2/12$. Κάμπτουμε τη ράβδο γύρω από το μέσον Ο κατά 90^0 ώστε να σχηματίσει ορθή γωνία με ίσα σκέλη και κορυφή το Ο. Η ροπή αδράνειας, I, της ράβδου ως προς τον ίδιο άξονα θα είναι:

α. $I=I_o$ β. $I>I_o$ γ. $I< I_o$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.16 Αβαρής ράβδος φέρει δύο σημειακές μάζες m σε απόσταση L από το μέσον της Ο και περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος σ΄ αυτήν και διέρχεται από το Ο, με ροπή αδράνειας I_O. Αν απομακρύνουμε τη μία μάζα σε απόσταση 2L από τον άξονα περιστροφής, η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον ίδιο άξονα θα γίνει;



α. $I=2I_O$ β. $I=I_O/2$. γ. $I=2,5I_O$ δ. $I=4I_O$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.17 Δύο συμπαγείς και ομογενείς σφαίρες ίδιας πυκνότητας με ακτίνες R_1, R_2 με $R_2=2R_1$ έχουν ροπές αδράνειας ως προς τον κύριο άξονα συμμετρίας τους. Ο λόγος I_1/I_2 ισούται με:

α. 1/4 β. 1/32 γ. 8 δ. 16

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.18 Η ροπή αδράνειας κυκλικού δακτυλίου μάζας m, ακτίνας R, του οποίου όλη η μάζα θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρεια, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο αυτού είναι:

α. $I=mR^2$ β. $I=0$ γ. $I=mR^2/2$ δ. $I=mR^2/3$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε3.19 Ράβδος μάζας m μήκους L περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο, Α, και είναι κάθετος σε αυτήν. Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα θα είναι:

α. $I=mL^2/12$ β. $I=0$ γ. $I=mL^2/2$ δ. $I=mL^2/3$

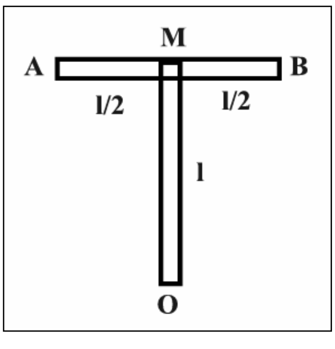
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν, $I_{cm}=mL^2/12$.

Ε3.20 Δύο ομογενείς σφαίρες (1) και (2) ίσων μαζών και ακτίνων είναι η μεν σφαίρα (1) συμπαγής η δε σφαίρα (2) κούφια. Για τις ροπές αδράνειας των σφαιρών ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους ισχύει:

α. $I_1>I_2$ β. $I_1=I_2$ γ. $I_1<I_2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χωρίς να κάνετε χρήση μαθηματικών σχέσεων που δίνουν τις ροπές αδράνειας δύο τέτοιων σφαιρών.

Ε3.21Οι δύο ομογενείς ράβδου του σχήματος έχουν ίσες μάζες m και μήκη L. Το σημείο Μ είναι μέσον του μήκους ΑΒ. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο και είναι κάθετος στη ράβδο είναι:

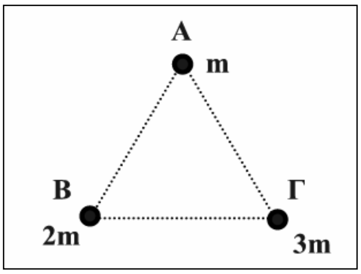


α. $I=13mL^2/12$ β. $I=5mL^2/12$ γ. $17mL^2/12$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν, $I_{cm}=mL^2/12$.

(Α) Ασκήσεις και προβλήματα

Α3.1 Τρεις σημειακές μάζες m, 2m και 3m είναι τοποθετημένες αντιστοίχως στις τρεις κορυφές Α, Β, Γ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, πλευράς r.

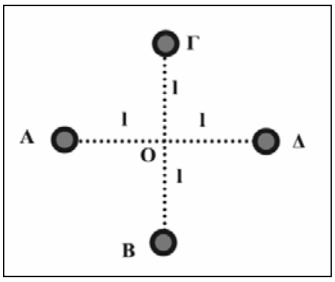


i.Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τριγώνου και διέρχεται από:
α. Το σημείο Α.
β. Το σημείο Β.
γ. Το κέντρο του τριγώνου.
ii.Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα που ταυτίζεται με τη πλευρά ΑΒ του τριγώνου.

i. α. $5mr^2$, β. $4mr^2$, γ. $2mr^2$ ii. $9mr^2/4$

Α3.2 Οι τέσσερις σημειακές μάζες m βρίσκονται στα άκρα Α, Β, Γ, Δ των δύο αβαρών ράβδων και απέχουν από το κοινό τους μέσον Ο ίσες αποστάσεις, L. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διέρχεται από:
α. Το κέντρο, Ο.
β. Το ένα άκρο, Α.

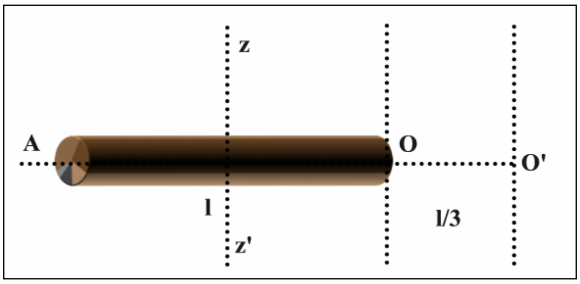
α. $4mL^2$, β. $8mL^2$



Α3.3 Η μάζα μιας κυκλικής στεφάνης μάζας, m, ακτίνας, r, θεωρείται ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιφέρεια. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της στεφάνης και διέρχεται από:
α. Το κέντρο της.
β. Το μέσον μιας ακτίνας της.
γ. Ένα σημείο της περιφέρειας.

α. $I_{cm}=mr^2$, β. $I=5mr^2/4$, γ. $I=2mr^2$

□**Α3.4** Μια ομογενής ράβδος μήκους λ, μάζας m έχει ροπή αδράνειας $I_{cm}=mL^2/12$ ως προς άξονα zz' που είναι κάθετος σ' αυτήν και διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι παράλληλος προς τον zz' και διέρχεται από:



α. Το ένα άκρο της, Ο.
β. Σημείο Ο' που βρίσκεται εκτός αυτής, στην προέκταση του μήκους της και απέχει απόσταση L/3 από το άκρο της, Ο .

α. $mL^2/3$, β. $7mL^2/9$

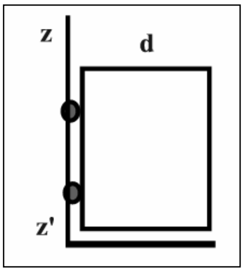
□**3.5** Ομογενής ράβδος ΟΑ, μάζας m και μήκους λ έχει προσαρμοσμένη στο άκρο της Α σημειακή μάζα m_1=m. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της Ο και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν, $I_{cm}=m\lambda^2/12$.

$I=4m\lambda^2/3$

A3.6 Ομογενής και συμπαγής σφαίρα έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, $I_{cm}=2mR^2/5$, όπου m η μάζα της και R η ακτίνα της. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που εφάπτεται σ' αυτήν.

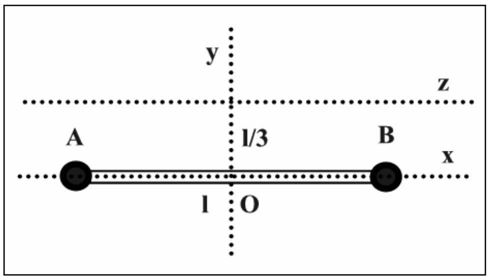
$I=7mR^2/5$

A3.7 Μια ομογενής πόρτα μάζας Μ, πλάτους d περιστρέφεται γύρω από άξονα zz′ ο οποίος ταυτίζεται με τη μια κατακόρυφη πλευρά της. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα αυτόν. Δίνεται η ροπή αδράνειας λεπτής ράβδου μάζας m, μήκους L, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν, ίση με $mL^2/12$.



$I=Md^2/3$

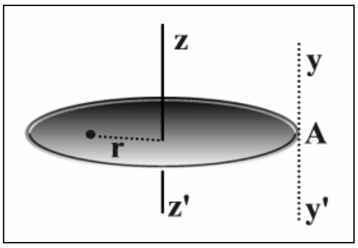
□**A3.8** Η λεπτή ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΒ, μήκους, L, και μάζας, m, έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της Ο και είναι κάθετος σ' αυτήν ίση με $I_{cm}=mL^2/12$. Η ράβδος φέρει στα δύο άκρα της σημειακές μάζες ίσες με m. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τους άξονες:



α. x, που ταυτίζεται με τη ράβδο.
β. y, που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετος στην ράβδο.
γ. z, που είναι παράλληλος προς τη ράβδο και απέχει από αυτήν απόσταση L/3.

α. $I_x=0$, β. $I_y=7mL^2/12$, γ. $I_z=mL^2/3$

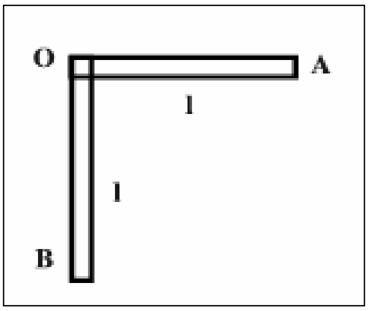
□**A3.9** Ο ομογενής ισοπαχής τροχός μάζας m και ακτίνας R έχει ροπή αδράνειας $I_{cm}=mR^2/2$ ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Επάνω στο δίσκο είναι στερεωμένη σημειακή μάζα, $m'=m/2$ σε απόσταση $r=R/2$ από τον άξονα περιστροφής, zz'.



Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς:
α. Τον άξονα περιστροφής, zz'.
β. Τον άξονα περιστροφής, yy' που διέρχεται από το σημείο Α της περιφέρειας και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου, με δεδομένο ότι η μάζα, m' απέχει απόσταση 3R/2 από το σημείο, Α.

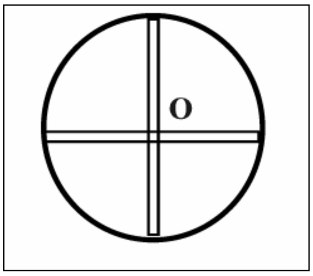
α. $5mR^2/8$, β. $21mR^2/8$

•**A3.10** Η ισοσκελής ορθογώνια γωνιά του σχήματος έχει σκέλη μάζας, m, και μήκους, L και αποτελείται από ομογενείς και ισοπαχείς ράβδους. Η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος στο μήκος της είναι $I_{cm}=mL^2/12$. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα περιστροφής που είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διέρχεται από:
α. Το σημείο, Ο.
β. Το σημείο, Α.



α. $2mL^2/3$, β. $5mL^2/3$

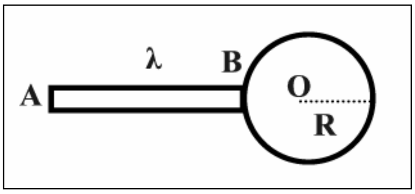
□**Α3.11** Τροχός άμαξας αποτελείται από στεφάνη η οποία έχει ομοιόμορφα κατανεμημένη μάζα 4m και ακτίνα λ. Ο τροχός έχει 4 ακτίνες μάζας m η κάθε μια και μήκους λ. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν.



Δίνεται η ροπή αδράνειας λεπτής ράβδου μάζας m, μήκους λ, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν, ίση με $m\lambda^2/12$.

$I_O=16m\lambda^2/3$

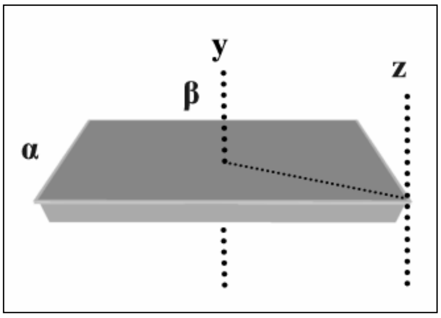
□**Α3.12** Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από μα ισοπαχή και ομογενής ράβδο, ΑΒ, μήκους, λ, μάζας, m, και ένα ισοπαχή και ομογενή δίσκο ίσης μάζας, m και ακτίνας $R=\lambda/3$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος στο μήκος της είναι $I_{cm}=m\lambda^2/12$, ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρου του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I_O=mR^2/2$. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας και διέρχεται από:



α. Το άκρο, Α.
β. Το κέντρο, Ο, του δίσκου.

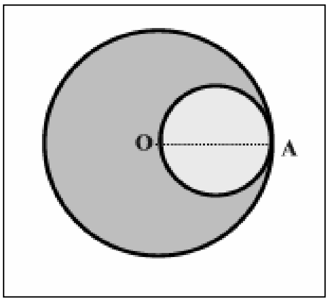
α. $13m\lambda^2/6$, β. $5m\lambda^2/6$

□**Α3.13** Η ορθογώνια λεπτή ομογενής πλάκα του σχήματος έχει μάζα m=30kg, διαστάσεις α=3m και β=5m και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα, y, που περνάει από το κέντρο μάζα της. Η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς τον άξονα y δίνεται από τη σχέση $I_{cm}=m(\alpha^2+\beta^2)/12$.
Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα, z, που διέρχεται από τη μια κορυφή της και είναι κάθετος στο επίπεδό της.



$I=360kgm^2$

□**Α3.14** Ομογενής ισοπαχής δίσκος μάζας m έχει ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο και είναι κάθετος σ' αυτόν είναι $I_O=mR^2/2$. Αφαιρούμε από το δίσκο ένα κυκλικό τμήμα ακτίνας R/2 όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του τμήματος που απομένει ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο, Α και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου.



$I=45mR^2/32$